KOLOKVIJ IZ MATEMATIKE II

Visokošolski študij

4. junij 2009

1. [20T] Določi enačbo ravnine, ki poteka skozi dane točke

$$A(1,2,-1), \quad B(2,1,3) \quad \text{in} \quad C(-3,-2,1).$$

Rešitev:
Določimo dva vektorja v ravnini:

$$\begin{aligned} \vec{a} &= \vec{AB} = (1,-1,4), \\ \vec{b} &= \vec{AC} = (-4,-4,2). \end{aligned}$$

Izračunamo normalo z vektorskim produktom:

$$\vec{n} = \vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{\imath} & \vec{\jmath} & \vec{k} \\ 1 & -1 & 4 \\ -4 & -4 & 2 \end{vmatrix} = (14,-18,-8).$$

Koeficient d:

$$d = (14,-18,-8) \cdot (1,2,-1) = -14.$$

Enacba ravnine:

$$14x - 18y - 8z = -14 \quad \text{oz.} \quad 7x - 9y - 4z = -7.$$

2. [20T] Izračunaj lastne vrednosti in lastne vektorje matrike

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}.$$

Rešitev:
Lastne vrednosti matrike A so rešitve enačbe $\det(A - \lambda I) = 0$:

$$\det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & -1 \\ 2 & 4-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 5\lambda + 6 = (\lambda - 2)(\lambda - 3) = 0$$

Lastni vrednosti matrike A: $\lambda_1 = 2$ in $\lambda_2 = 3$. Lastna vektorja, ki pripadata tema lastnima vrednostima:

i) $\lambda_1 = 2$:

$$A - \lambda_1 I = A - 2I = \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Lastni vektor: $x_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$.

ii) $\lambda_1 = 3$:

$$A - \lambda_2 I = A - 3I = \begin{bmatrix} -2 & -1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Lastni vektor: $x_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix}$.

3. [20T] Razvij funkcijo

$$f(x) = \frac{-5x+7}{(1-x)(2-x)}$$

v Taylorjevo vrsto okrog točke $a = 0$. Namig: geometrijska vrsta.

Rešitev:
Racionalno funkcijo razbijemo na parcialne ulomke:

$$\frac{-5x+7}{(1-x)(2-x)} = \frac{A}{1-x} + \frac{B}{2-x} = \frac{(-A-B)x + 2A + B}{(1-x)(2-x)}$$

Sledi, da je $A = 2$ in $B = 3$. Uporabimo geometrijsko vrsto:

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{2}{1-x} + \frac{3}{2-x} \\ &= 2\sum_{n=0}^{\infty} x^n + \frac{3}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{x}{2}\right)^n \\ &= \sum_{n=0}^{\infty}\left(2 + \frac{3}{2^{n+1}}\right)x^n \end{aligned}$$

4. [20T] Določi in klasificiraj lokalne ekstreme funkcije

$$f(x,y) = 3x^2 + 2xy + 2y^2 + 4x - 2y + 5.$$

Rešitev:
Prvi parcialni odvodi:

$$\begin{aligned} f_x &= 6x + 2y + 4, \\ f_y &= 2x + 4y - 2. \end{aligned}$$

Stacionarne točke dobimo tam, kjer sta oba prva parcialna odvoda enaka 0. Sistem enačb:

$$\begin{aligned} 6x + 2y + 4 &= 0, \\ 2x + 4y - 2 &= 0. \end{aligned}$$

To je sistem linearnih enačb, ki ima eno rešitev: $x = -1$, $y = 1$, torej dobimo eno stacionarno točko $T(-1, 1)$.
Drugi parcialni odvodi:

$$\begin{aligned} f_{xx} &= 6, \\ f_{yy} &= 4, \\ f_{xy} &= 2. \end{aligned}$$

Hessejeva matrika funkcije f:

$$Hf = \begin{bmatrix} 6 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}.$$

Determinanta te matrike v stacionarni točki:

$$\det Hf(-1,1) = \begin{vmatrix} 6 & 2 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = 20 > 0.$$

Ker je poleg tega še $f_{xx}(-1,1) = 6 > 0$, imamo v točki $T(-1,1)$ minimum.

5. [20T] Reši diferencialno enačbo

$$y' + 2y = 3\mathrm{e}^{-x}.$$

Poišči tisto rešitev, ki ustreza začetnemu pogoju $y(0) = 4$.

Rešitev:
To je linearna diferencialna enačba.

(i) Homogeni del:

$$\begin{aligned} y' + 2y &= 0 \\ \int \frac{dy}{y} &= -2\int dx \\ \ln y &= -2x + \ln C \\ y_H &= C\mathrm{e}^{-2x} \end{aligned}$$

(ii) Partikularno rešitev poiščemo z variacijo konstante:

$$\begin{aligned} y &= C(x)\mathrm{e}^{-2x} \\ y' &= C'(x)\mathrm{e}^{-2x} - 2C(x)\mathrm{e}^{-2x} \end{aligned}$$

Vstavimo v enačbo in dobimo:

$$C'(x)\mathrm{e}^{-2x} - 2C(x)\mathrm{e}^{-2x} + 2C(x)\mathrm{e}^{-2x} = 3\mathrm{e}^{-x}.$$

Sledi:

$$\begin{aligned} C'(x) &= 3\mathrm{e}^{x} \\ C(x) &= 3\mathrm{e}^{x} \end{aligned}$$

Partikularna rešitev:

$$y_p = 3\mathrm{e}^{-x}$$

Splošna rešitev:

$$y(x) = y_p + y_H = 3\mathrm{e}^{-x} + C\mathrm{e}^{-2x}.$$

Zacetni pogoj:

$$y(0) = 3 + C = 4 \quad \Rightarrow C = 1.$$

Rešitev, ki ustreza začetnemu pogoju:

$$y(x) = 3\mathrm{e}^{-x} + \mathrm{e}^{-2x}.$$