REŠITVE

Naloga 1 (20 točk)

Dani sta matriki

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 3 & -4 & 1 \\ -1 & 0 & 5 \end{bmatrix} \quad \text{in} \quad B = \begin{bmatrix} 3 & -3 \\ 2 & -2 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}.$$

Izračunajte:

a.) determinanto matrike A,

b.) matriko $X = A \cdot B - 3B$.

a.) Najprej izračunajmo determinanto matrike A:

$$\det A = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 3 & -4 & 1 \\ -1 & 0 & 5 \end{vmatrix} \begin{matrix} 1 & -2 \\ 3 & -4 \\ -1 & 0 \end{matrix} = -20 + 2 + 0 - 0 - 0 + 30 = 12.$$

b.) Matriko X dobimo na naslednji način:

$$\begin{aligned} X &= A \cdot B - 3B = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 3 & -4 & 1 \\ -1 & 0 & 5 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 3 & -3 \\ 2 & -2 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} - 3 \cdot \begin{bmatrix} 3 & -3 \\ 2 & -2 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 2 & -2 \\ 2 & -2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 9 & -9 \\ 6 & -6 \\ 3 & -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -10 & 10 \\ -4 & 4 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Naloga 2 (20 točk)

Dana so oglišča trikotnika:

$$A(1, -1, 1), \ B(2, -1, 3), \ C(3, 1, 0).$$

Izračunajte:

a.) ploščino trikotnika ABC,

b.) kot med stranicama AB in AC.

Najprej določimo dva vektorja, ki trikotnik oklepata:

$$\begin{aligned}\vec{a} &= \vec{AB} = \vec{r_B} - \vec{r_A} = (2,-1,3)-(1,-1,1) = (1,0,2),\\ \vec{b} &= \vec{AC} = \vec{r_C} - \vec{r_A} = (3,1,0)-(1,-1,1) = (2,2,-1).\end{aligned}$$

a.) *Ploščino trikotnika ABC sedaj izračunamo kot polovico ploščine paralelograma, torej po formuli*

$$p = \frac{1}{2}\cdot|\vec{a}\times\vec{b}|.$$

Ker je vektorski produkt vektorjev $\vec{a}$ in $\vec{b}$ enak

$$\vec{a}\times\vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 1 & 0 & 2\\ 2 & 2 & -1\end{vmatrix} = (-4,5,2),$$

dobimo

$$p = \frac{1}{2}\cdot|(-4,5,2)| = \frac{1}{2}\sqrt{(-4)^2+5^2+2^2} = \frac{1}{2}\sqrt{45} = \frac{1}{2}\cdot 3\sqrt{5} = \frac{3}{2}\sqrt{5}.$$

b.) *Kot med stranicama AB in AC je enak kotu med vektorjema $\vec{a}$ in $\vec{b}$, ki ga dobimo iz formule*

$$\cos\varphi = \frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|} = \frac{(1,0,2)\cdot(2,2,-1)}{|(1,0,2)|\cdot|(2,2,-1)|} = \frac{2+0-2}{\sqrt{5}\cdot\sqrt{9}} = 0.$$

Torej, iskani kot med stranicama AB in AC je enak $\varphi = \frac{\pi}{2}$.

Naloga 3 (20 točk)

Razvijte funkcijo

$$f(x) = \begin{cases} 2, & -\pi < x \le 0\\ -2, & 0 < x < \pi\end{cases}$$

v Fourierovo vrsto na intervalu $[-\pi,\pi]$.

Dana funkcija $f(x)$ je liha, zato bo njena Fourierova vrsta izgledala takole:

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin(nx).$$

Izračunajmo koeficiente:

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{2}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin(nx)\,dx = \frac{1}{\pi}\cdot 2\cdot\int_0^{\pi} f(x)\sin(nx)\,dx = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}(-2)\cdot\sin(nx)\,dx\\ &= \frac{2}{\pi}\cdot\left[\frac{2}{n}\cdot\cos(nx)\right]_0^{\pi} = \frac{2}{\pi}\cdot\frac{2}{n}\cdot(\cos(n\pi)-\cos 0) = \frac{4}{n\pi}\cdot\left((-1)^n-1\right).\end{aligned}$$

Sledi rezultat:

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin(nx) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4}{n\pi} \cdot ((-1)^n - 1)\sin(nx).$$

Naloga 4 (20 točk)
Poiščite in klasificirajte lokalne ekstreme funkcije dveh spremenljivk:

$$f(x,y) = e^x(x^2+y^2).$$

Kandidati za lokalne ekstreme so stacionarne točke funkcije $f(x,y)$, to je točke, v katerih sta oba prva parcialna odvoda enaka 0:

$$\begin{aligned} f'_x(x,y) &= e^x(x^2+y^2) + e^x \cdot 2x = e^x(x^2+y^2+2x) = 0, \\ f'_y(x,y) &= e^x \cdot 2y = 0. \end{aligned}$$

Ker je eksponentna funkcija, ki ima za osnovo Eulerjevo število e, povsod pozitivna, se sistem poenostavi v

$$\begin{aligned} x^2+y^2+2x &= 0, \\ 2y &= 0. \end{aligned}$$

Sledi $y=0$ in zato iz prve enačbe dobimo $x(x+2)=0$, kar da dve stacionarni točki:

$$T_1(0,0) \;\; in \;\; T_2(-2,0).$$

Da bi ugotovili, ali in kakšen tip ekstrema je v teh stacionarnih točkah, rabimo druge parcialne odvode funkcije $f(x,y)$:

$$\begin{aligned} f''_{xx}(x,y) &= e^x(x^2+y^2+2x) + e^x(2x+2) = e^x(x^2+y^2+4x+2), \\ f''_{xy}(x,y) &= e^x \cdot 2y, \\ f''_{yy}(x,y) &= e^x \cdot 2. \end{aligned}$$

Te odvode zložimo v Hessejevo matriko

$$H_f = \begin{bmatrix} f''_{xx} & f''_{xy} \\ f''_{yx} & f''_{yy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e^x(x^2+y^2+4x+2) & e^x \cdot 2y \\ e^x \cdot 2y & e^x \cdot 2 \end{bmatrix}$$

ter izračunamo determinanti te matrike v točkah $T_1(0,0)$ in $T_2(-2,0)$. Dobimo:

$$\begin{aligned} \det H_f(0,0) &= \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = 4 > 0, \\ \det H_f(-2,0) &= \begin{vmatrix} -2e^{-2} & 0 \\ 0 & 2e^{-2} \end{vmatrix} = -4e^{-4} < 0. \end{aligned}$$

Sledi, da v točki T_2 ni lokalnega ekstrema ($\det H_f(-2,0) < 0$), ampak je sedlo, v točki T_1 pa je lokalni minimum ($\det H_f(0,0) > 0$ in $f''_{xx}(0,0) > 0$).

Naloga 5 (20 točk)
Rešite diferencialno enačbo
$$y'' - 4y' + 4y = \sin(2x).$$

Dana je linearna diferencialna enačba s konstantnimi koeficienti. Splošna rešitev take dif. enačbe je oblike
$$y(x) = y_h + y_p,$$
kjer je y_h rešitev homogene linearne dif. enačbe s konst. koef., y_p pa partikularna rešitev.

A. Homogeni del (računamo y_h):

$$y'' - 4y' + 4y = 0.$$

To je homogena linearna dif. enačba s konstantnimi koeficienti. Dobimo karakteristično enačbo:

$$\begin{aligned} \lambda^2 - 4\lambda + 4 &= 0 \\ (\lambda - 2)^2 &= 0 \\ \lambda_{1,2} &= 2 \end{aligned}$$

Rešitev homogenega dela je zato:

$$y_h = C_1 e^{2x} + C_2 x e^{2x}.$$

B. Nehomogeni del (računamo y_p):

Partikularno rešitev y_p iščemo z metodo nedoločenih koeficientov. Za nastavek vzamemo funkcijo iste oblike, kot je desna stran

$$b(x) = \sin(2x)$$

z nekaj prostimi parametri. To je

$$y_p = A\sin(2x) + B\cos(2x).$$

Nedoločena koeficienta A in B določimo, tako da nastavek vstavimo v dif. enačbo. Še prej ga seveda moramo dvakrat odvajati:

$$\begin{aligned} y &= A\sin(2x) + B\cos(2x) \\ y' &= 2A\cos(2x) - 2B\sin(2x) \\ y'' &= -4A\sin(2x) - 4B\cos(2x) \end{aligned}$$

Funkcije y, y', y'' vstavimo v dif. enačbo:

$(-4A\sin(2x) - 4B\cos(2x)) - 4(2A\cos(2x) - 2B\sin(2x)) + 4(A\sin(2x) + B\cos(2x)) = \sin(2x).$

Dobljeno enačbo rešimo, tako da primerjamo koeficiente pred linearno neodvisnima funkcijama $\sin(2x)$ *in* $\cos(2x)$ *na obeh straneh enačbe:*

$$\begin{aligned} \sin(2x): &\quad -4A + 8B + 4A &= 1, \\ \cos(2x): &\quad -4B - 8A + 4B &= 0. \end{aligned}$$

Sledi rešitev sistema: $A = 0$ *in* $B = \frac{1}{8}$. *Partikularna rešitev dif. enačbe se zato glasi*

$$y_p = \frac{1}{8}\cos(2x).$$

Splošna rešitev dif. enačbe je torej

$$y = y_h + y_p = C_1 e^{2x} + C_2 x e^{2x} + \frac{1}{8}\cos(2x).$$