Kolokvij iz matematike 2 VSP

3. junij 2011

Ob vsaki nalogi je zapisan odstotek pravilno rešenih nalog.

(1) Dan je sistem enačb $kx = 1, \quad x + y = 2$. **22%**
- Za katere vrednosti parametra k ima sistem enolično rešitev,
- za katere vrednosti ima večlično rešitev in
- za katere vrednosti nima rešitve?

Rešitev:

Za $k \neq 0$ je sistem enolično rešljiv. Rešitev je $x = \frac{1}{k}$ in $y = 2 - \frac{1}{k}$. Za $k = 0$ sistem nima rešitve.

(2) Koliko je vektorski produkt $\vec{a} \times \vec{b}$, če je $\vec{a} = (1, 1, 1)$ in $\vec{b} = (1, 0, 1)$. **80%**

Rešitev:

$\vec{a} \times \vec{b} = (1, 0, -1)$.

(3) Dana je točka $T(1, 1, 0)$ in ravnina $z = 3$. **30%**
- Določi razdaljo točke od ravnine.
- Določi zrcalno točko T^* k točki T glede na ravnino.

Rešitev:

Razdalja točke od ravnine je 3, zrcalna točka je $(1, 1, 6)$.

(4) Premico v prostoru podamo s presečiščem ravnin.

Dani sta premici: $p_1 = \{x = 1, y = 0\}$ in $p_2 = \{z = 2, x = 0\}$. **10%**
- Poišči najkrajšo razdaljo med njima.
- Kakšen kot oklepata smerna vektorja teh dveh premic?

Rešitev:

Parametrična oblika:

p_1: $\vec{r} = (1, 0, 0) + \lambda(0, 0, 1)$, p_2: $\vec{r} = (0, 0, 2) + \lambda(0, 1, 0)$ Kot med smernima vektorjema je $\frac{\pi}{2}$, ker je $(0, 0, 1).(0, 1, 0) = 0$. Naloga je pravilno rešena le, če sta smerna vektorja pramic pravilno izračunana. Skalarni produkt $(1, 0, 0).(0, 0, 2) = 0$, vendar to nista smerna vektoja premic zato naloga ni pravilno rešena. Razdalja med njima je 1.

(5) Določi ploščino trikotnika, z oglišči $T_1(0, 0, 0)$, $T_2(1, 0, 0)$ in $T_3(0, 1, 1)$. **68%**

Rešitev:

Ploščina trikotnika je $\frac{\sqrt{2}}{2}$.

(6) Poišči lastne vektorje in lastne vrednosti matrike $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$. **7%**

Rešitev:

Ena lasna vrednost je 0, ker je determinanta matrike enaka 0. Lastna vektorja ustrezata enačbi $x + y + z = 0$. Dve neodvisni rešitvi sta $(1, 0, -1)$ in $(0, 1, -1)$. Naslednja lastna vrednost je 3 pripadajoči lastni vektor pa je enak $(1, 1, 1)$.

(7) Dana je funkcija $f(x, y) = (x - 4)^2 - (y + 2)^2$. **7%**
- Določi stacionarne točke funkcije in njihovo naravo.
- Določi ekstrem gornje funkcije pri pogoju $2x + y = 1$ in ugotovi ali gre za maksimum ali minimum.

Rešitev:

Stacionarna točka je $(4, -2)$. Ker je $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}\right)^2 = -4$, je stacionarna točka sedlo. Drugi del naloge lahko rešimo takole: Iščemo ekstrem kvadratne parabole $z = (x-4)^2 - ((1-2x)+2)^2$, $x = \frac{2}{3}$ in $y = -\frac{1}{3}$, ker je vodilni koeficient parabole negativen gre za maksimum.

(8) Dana je diferencialna enačba $\ddot{x}(t) + \omega^2 x(t) = \sin(t)$, $x(0) = 0$ in $\dot{x}(0) = 0$. **4%**

- Reši gornjo enačbo.
- Za katere vrednosti ω grejo amplitude rešitve s časom preko vseh meja (resonanca).

Rešitev:

$x(t) = \frac{\omega \sin(t) - \sin(\omega t)}{\omega^3 - \omega}$, če velja $\omega \neq 1$ in $x(t) = \frac{1}{2}\left(\sin(t) - t\cos(t)\right)$, za $\omega = 1$.

(9) Dana je diferencialna enačba $\dot{x}(t) + 2x(t) = e^{-2t}$, $x(0) = 0$. **4%**

- Reši diferencialno enačbo.
- Koliko je največja vrednost, ki jo zavzame funkcija $x(t)$, za $t > 0$?

Rešitev: $x(t) = te^{-2t}$. Maksimum $\dot{x}(t) = 0$, $e^{-2t} - 2te{-}2t = 0$, $t = \frac{1}{2}$ in $x(\frac{1}{2}) = \frac{1}{2e}$.

(10) Reši sistem diferencialnih enačb

$\ddot{x}(t) = 0, \quad \ddot{y}(t) = -g, \quad x(0) = y(0) = 0, \quad \dot{x}(0) = \dot{y}(0) = 1$, in $g > 0$. **1%**

- Poišči maksimalno vrednost $y(t)$.
- Poišči vrednost $x(t)$, ko je $y(t) = 0$, $t > 0$.

Rešitev:

Poševni met: $x(t) = t$ in $y(t) = -\frac{gt^2}{2} + t$. Parabola: $y = -\frac{gx^2}{2} + x$.

Teme parabole: $x = \frac{1}{g}$ in $y = \frac{1}{2g}$. Domet: $x = \frac{2}{g}$.