Kolokvij iz matematike 2 VSP

8. junij 2011

(1) Zapiši matriko linearne transformacije $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $f((x,y)) = (x,0)$, ter določi lastne vrednosti in lastne vektorje matrike.

Rešitev 8 %:

$f((1,0)) = (1,0)$, $f((0,1)) = (0,0)$, $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, $\begin{vmatrix} 1-\lambda & 0 \\ 0 & -\lambda \end{vmatrix} = -\lambda(1-\lambda)$.

Lastni vrednosti $\lambda_1 = 1$ in $\lambda_2 = 0$.

Lastna vektorja $(1,0)$ in $(0,1)$.

(2) Zapiši štiri člene razvoja funkcije $f(x) = \dfrac{1}{1-x}$ v Taylorjevo vrsto v okolici točke nič in določi konvergenčni polmer.

Rešitev 39 %:

$f(x) = 1 + x + x^2 + x^3 \ldots$, konvergenčno območje $|x| < 1$, konvergenčni polmer $R = 1$.

(3) Koliko je vsota vrste $\dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{2^2} + \cdots + \dfrac{1}{2^n} + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{2^n}$.

Rešitev 33 %:

Vrsta $\dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{2^2} + \dfrac{1}{2^3} + \ldots$ je geometrijska s prvim členom $\dfrac{1}{2}$ in kvocientom $q = \dfrac{1}{2}$.

$\dfrac{1}{2}(1 + \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{2^2} + \ldots) = \dfrac{1}{2}\dfrac{1}{1-\frac{1}{2}} = 1$.

(4) Naj bo $g(x)$ razvoj funkcije $f(x) = \begin{cases} 1, & x \in [-\pi/4, \pi/4] \\ 0, & \text{drugod} \end{cases}$ v Fourierevo vrsto na intervalu $[-\pi, \pi]$.

Koliko je $g(\pi/4)$?

Rešitev 1 %: $g(\dfrac{\pi}{4}) = \dfrac{1}{2}\left(\lim_{x \searrow \frac{\pi}{4}} f(x) + \lim_{x \nearrow \frac{\pi}{4}} f(x)\right) = \dfrac{1}{2}$.

(5) Poišči ekstrem funkcije $f(x,y) = (x+y)e^{-x-y}$, pri pogoju $x - 2 = 0$, in določi njegovo naravo.

Rešitev 4 %:

Ker je $x = 2$, vzemimo $h(y) = (2+y)e^{-2-y} \to$, $h'(y) = e^{-2-y}(-1-y) = 0 \to$, $y = -1$, $h''(y) = e^{-2-y}(-1) < 0 \to$, maksimum.

(6) Poišči družino ortogonalnih trajektorij k družini $x^3 - 2xy^2 = C$.
Rešitev 0 %:
Družina $x^3 - 3xy^2 = C$. Diferencialna enačba družine $d(x^3 - 3xy^2) = 0$, $(3x^2 - 3y^2)dx - 6xy\,dy = 0$. Diferencialna enačba ortogonalne družine $(3x^2 - 3y^2)dy + 6xy\,dx = 0$. Diferencialna enačba je popolni diferencial $dv(x, y) = 0$.
$\dfrac{\partial v}{\partial x} = 6xy \rightarrow$, $v(x, y) = 3x^2y + f(y)$.
$\dfrac{\partial v}{\partial y} = 3x^2 + f'(y) = 3x^2 - 3y^2$, $f'(y) = -3y^2 \rightarrow f(y) = -y^3$.
Ortogonalna družina $v(x, y) = C \rightarrow$, $3x^2y - y^3 = C$.

(7) Poišči rešitev diferencialne enačbe $dx + dy = 0$, za katero velja $y(1) = 1$.
Rešitev 46 %:
$1 + y' = 0 \rightarrow$, $y' = -1 \rightarrow$, $y = -x + C$.
Vstavimo pogoj $1 = -1 + C \rightarrow$, $C = 2$.
Rešitev $y = -x + 2$.

(8) Poišči rešitev diferencialne enačbe $\dot{x}(t) + x(t) = e^{-t}$, za katero velja $x(0) = 0$.
Rešitev 23 %:
Linearna nehomogena enačba s konstantnimi koeficienti.
Karakteristični polinom $\lambda + 1 = 0$, $\lambda = -1$, rešitev homogene enačbe $y_h = Ce^{-t}$.
Partikularna rešitev $\overline{y} = Ate^{-t}$.
Splošna rešitev $y = Ce^{-t} + te^{-t}$. Upoštevamo še pogoj in dobimo $y = te^{-t}$.

(9) Reši sistem diferencialnih enačb $\ddot{x}(t) = 0$, $\quad \ddot{y}(t) = -10$, $\quad x(0) = y(0) = 0$, $\dot{x}(0) = \dot{y}(0) = 10$.
Rešitev 19 %: $x(t) = C_1t + C_2$, $y(t) = -5t^2 + C_3t + C_4$.
Upoštevamo začetne pogoje in dobimo. $x(t) = 10t$ in $y(t) = -5t^2 + 10t$.

(10) Za rešitev gornjega sistema diferencialnih enačb poišči: maksimalno vrednost $y(t)$ in vrednost $x(t)$, ko je $y(t) = 0$, za $t > 0$.
Rešitev 10 %:
$y'(t) = -10t + 10 = 0 \rightarrow$, $t = 1$,
$y(t) = 0 \rightarrow$, $t = 2$.
Najvišja točka trajektorije $x(1) = 10$, $y(1) = 5$, domet $x(2) = 20$.

Povprečna ocena je 3.3297.

Ogled kolokvijev je v sredo 13. 6. ob 10.00. Borut Jurčič Zlobec