Matematika II (VS) 1. kolokvij (11. april 2013)

REŠITVE

Naloga 1 (20 točk)

Dana so oglišča trikotnika v prostoru: $A(0,0,1)$, $B(1,2,-1)$ in $C(1,2,0)$. Izračunajte:

a.) ploščino trikotnika ABC,

b.) dolžino stranice AC,

c.) obseg trikotnika ABC.

Rešitev:

Določimo dva vektorja, ki trikotnik določata:

$$\vec{a} = \vec{AB} = \vec{r_B} - \vec{r_A} = (1,2,-1) - (0,0,1) = (1,2,-2),$$
$$\vec{b} = \vec{AC} = \vec{r_C} - \vec{r_A} = (1,2,0) - (0,0,1) = (1,2,-1).$$

Sedaj računamo:

a.) ploščina trikotnika ABC je polovica ploščine paralelograma:

$$p = \frac{1}{2}|\vec{a} \times \vec{b}| = \frac{1}{2}|(2,-1,0)| = \frac{\sqrt{5}}{2},$$

b.) dolžina stranice AC je dolžina vektorja $\vec{b}$:

$$|\vec{b}| = |(1,2,-1)| = \sqrt{1^2 + 2^2 + (-1)^2} = \sqrt{6},$$

c.) obseg trikotnika ABC je vsota dolžin njegovih stranic:

$$o = |\vec{AB}| + |\vec{AC}| + |\vec{BC}| = |(1,2,-2)| + |(1,2,-1)| + |(0,0,1)| = 4 + \sqrt{6}.$$

Naloga 2 (20 točk)

Dani sta premica $p\colon \frac{x+1}{2} = y = 3z$ in ravnina $\Pi\colon x + y = 5$.

a.) Zapišite parametrično obliko enačbe premice p.

b.) Določite točko P, v kateri premica p prebada ravnino Π.

c.) Izračunajte kot, pod katerim premica p prebada ravnino Π.

Rešitev:

Premico p določata točka $A(-1,0,0)$ in smerni vektor $\vec{s}=(2,1,\frac{1}{3})$.
Normalni vektor ravnine Π je $\vec{n}=(1,1,0)$.

a.) Parametrična oblika enačbe premice p je:

$$\begin{aligned} x &= s_1 t + a_1 = 2t-1, \\ y &= s_2 t + a_2 = t, \\ z &= s_3 t + a_3 = \frac{1}{3}t. \end{aligned}$$

b.) Točko P, v kateri premica p prebada ravnino Π, dobimo, ko v enačbo ravnine Π vstavimo parametrične koordinate točk na premici p:

$$(2t-1)+t=5.$$

Sledi $3t=6$ in $t=2$. Iskano presečišče je $P(3,2,\frac{2}{3})$.

c.) Kot, pod katerim premica p prebada ravnino Π, dobimo s pomočjo kota med smernim vektorjem premice p in normalo ravnine Π:

$$\cos\varphi = \frac{\vec{s}\cdot\vec{n}}{|\vec{s}|\cdot|\vec{n}|} = \frac{(2,1,\frac{1}{3})\cdot(1,1,0)}{|(2,1,\frac{1}{3})|\cdot|(1,1,0)|} = \frac{3}{\frac{\sqrt{46}}{3}\cdot\sqrt{2}} = \frac{9}{2\sqrt{23}}.$$

Torej, $\varphi = \arccos\frac{9}{2\sqrt{23}} \doteq 20°14'$. Kot med ravnino in premico pa je

$$\alpha = 90° - \varphi \doteq 69°46'.$$

Naloga 3 (20 točk)

Izračunajte neznano matriko X, ki zadošča enačbi $A\cdot B = 2X - I$, kjer sta

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 4 \\ 11 & -1 \end{bmatrix} \quad \text{in} \quad B = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ -2 & -1 & -3 \end{bmatrix}.$$

Ali je matrika X obrnljiva? Odgovor utemeljite.

Rešitev:

Neznano matriko X lahko iz enačbe izrazimo:

$$X = \frac{1}{2}(A\cdot B + I).$$

Najprej izračunajmo produkt matrik A in B:

$$A\cdot B = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 4 \\ 11 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ -2 & -1 & -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & 3 & 9 \\ -8 & -4 & -12 \\ 24 & 12 & 36 \end{bmatrix}.$$

Sedaj sledi:

$$X = \frac{1}{2}(A \cdot B + I) = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 7 & 3 & 9 \\ -8 & -3 & -12 \\ 24 & 12 & 37 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{7}{2} & \frac{3}{2} & \frac{9}{2} \\ -4 & -\frac{3}{2} & -6 \\ 12 & 6 & \frac{37}{2} \end{bmatrix}.$$

Matrika je obrnljiva natanko tedaj, kadar je njena determinanta različna od 0. *Ker je*

$$detX = \begin{vmatrix} \frac{7}{2} & \frac{3}{2} & \frac{9}{2} \\ -4 & -\frac{3}{2} & -6 \\ 12 & 6 & \frac{37}{2} \end{vmatrix} = \frac{39}{8} \neq 0,$$

je matrika X obrnljiva.

Naloga 4 (20 točk)

Poiščite rešitve sistema enačb, če obstajajo:

$$\begin{aligned} x + y + z &= 2, \\ 2x - 3y - z &= 5, \\ x - 2y - 3z &= -4, \\ 5x + y - 2z &= -3, \\ 3x + 2y + 2z &= 3. \end{aligned}$$

Rešitev:

Zapišimo razširjeno matriko sistema:

$$R = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & -3 & -1 & 5 \\ 1 & -2 & -3 & -4 \\ 5 & 1 & -2 & -3 \\ 3 & 2 & 2 & 3 \end{array}\right].$$

Sistem linearnih enačb lahko rešimo z Gaussovo eliminacijo:

$$R \approx \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & -5 & -3 & 1 \\ 0 & -3 & -4 & -6 \\ 0 & -4 & -7 & -13 \end{array}\right] \approx \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 2 & 16 \\ 0 & 0 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & -3 & -1 \end{array}\right] \approx \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 2 & 16 \\ 0 & 0 & 0 & 22 \\ 0 & 0 & 0 & 46 \end{array}\right] \approx \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 2 & 16 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right].$$

Vidimo, da je rang matrike koeficientov sistema enak 3, *rang razširjene matrike R pa je enak* 4. *Ker ranga nista enaka, sistem linearnih enačb ni rešljiv, je protisloven. To pravi tudi predzadnja vrstica končne razširjene matrike* $(0 = 1)$.

Naloga 5 (20 točk)

Matrika A slika realne vektorje, kot je opisano spodaj.

- Vektor $v_1 = (1, 0, 1)$ preslika v $w_1 = (3, 0, 3)$.
- Vektor $v_2 = (2, -1, 2)$ preslika v $w_2 = (6, -1, 6)$.
- Vektor $v_3 = (1, 2, 2)$ preslika v $w_3 = (4, 2, 5)$.
- Vektor $v_4 = (0, 2, 0)$ preslika v $w_4 = (0, 2, 0)$.

Kateri izmed vektorjev v_1, v_2, v_3 in v_4 so lastni vektorji matrike A? Poiščite tudi tem vektorjem pripadajoče lastne vrednosti matrike A.

Rešitev:

Lastna vektorja matrike A sta v_1 in v_4, saj jima matrika ne spremeni smeri; vektorju v_1 spremeni le dolžino (za faktor 3), vektor v_4 pa ohrani. Vektorju v_1 zato pripada lastna vrednost 3, vektorju v_4 pa lastna vrednost 1.