2. Kolokvij Matematika II - VSP

6.junij 2013

1. Poiščite konvergenčno območje potenčne vrste

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n+1)2^n}(x-2)^n \quad !$$

2. Katere izmed točk $T_0(0,0)$, $T_1(1,1)$, $T_2(2,2)$ so *stacionarne točke* funkcije

$$f(x,y) = xy^2 - x^2 - 2y^2 \quad ?$$

   V točkah, ki so stacionarne, klasificirajte lokalne ekstreme !

3. Rešite diferencialno enačbo

$$xy' + y = 2x \quad !$$

4. Rešite diferencialno enačbo

$$\begin{aligned} y'' - y' - 2y &= 2x + 1 \\ y(0) &= 5 \\ y'(0) &= 0 \quad ! \end{aligned}$$

Rešitve

1. naloga

Konvergenčni radij: $R = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{|a_n|}{|a_{n+1}|} =$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{(n+1)2^n}}{\frac{1}{(n+2)2^{n+1}}} = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+2)2^{n+1}}{(n+1)2^n} = 2\lim_{n\to\infty} \frac{n+2}{n+1} = 2$$

V krajiščih konvergenco raziščemo posebej:

$x = x_0 - R = 2 - 2 = 0$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n+1)2^n}(-2)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(n+1)} \text{ je konvergentna vrsta}$$

$x = x_0 + R = 2 + 2 = 4$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n+1)2^n}2^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n+1)} \text{ je divergentna vrsta}$$

Konvergenčno območje: $\boxed{[0,4)}$

2. naloga

$$f_x = y^2 - 2x$$
$$f_y = 2xy - 4y$$

$$A = f_{xx} = -2$$
$$C = f_{yy} = 2x - 4$$
$$B = f_{xy} = 2y$$
$$D = AC - B^2 = (-2)(2x-4) - (2y)^2$$

$$f_x(T_0) = f_y(T_0) = 0 \quad \rightarrow \quad T_0 \text{ je stacionarna točka}$$
$$f_x(T_1) = -1 \quad \rightarrow \quad T_1 \text{ ni stacionarna točka}$$
$$f_x(T_2) = f_y(T_2) = 0 \quad \rightarrow \quad T_2 \text{ je stacionarna točka}$$

$$D(T_0) = (-2)(-4) - 0^2 = 8 > 0 \quad \rightarrow \quad \text{je ekstrem}$$
$$f_{xx}(T_0) = -2 < 0 \quad \rightarrow \quad T_0 \text{ je maximum}$$

$$D(T_2) = (-2)(4-4) - 16 < 0 \quad \rightarrow \quad \text{ni ekstrem}$$

$$\boxed{T_0 \text{ je max}}$$

3. naloga

Homogena enačba

$$xy' + y = 0$$

$$x\frac{dy}{dx} = -y$$

$$\frac{dy}{y} = -\frac{dx}{x}$$

$$\int \frac{dy}{y} = -\int \frac{dx}{x}$$

$$\ln y = -\ln x + \ln C$$

$$y_h = \frac{C}{x}$$

Variacija konstante

$$y = \frac{C(x)}{x}$$

$$x\,\frac{C'(x)x - C(x)}{x^2} + \frac{C(x)}{x} = 2x$$

$$C'(x) - \frac{C(x)}{x} + \frac{C(x)}{x} = 2x$$

$$C(x) = \int 2x\,dx = x^2 + D$$

$$\boxed{y = x + \frac{D}{x}}$$

4. naloga

Karakteristična enačba:

$\lambda^2 - \lambda - 2 = 0$

$(\lambda - 2)(\lambda + 1) = 0$

$\lambda_1 = 2\ ,\ \lambda_2 = -1$

$y_h = Ae^{2x} + Be^{-x}$

Partikularna rešitev:

$y_p = Cx + D$

$y' = C$

$y'' = 0$

$-C - 2(Cx + D) = 2x + 1$

$-2Cx + (-C - 2D) = 2x + 1$

$C = -1$

$D = 0$

Splošna rešitev:

$y = y_h + y_p = Ae^{2x} + Be^{-x} - x$

Začetna pogoja:

$y' = 2Ae^{2x} - Be^{-x} - 1$

$A + B = 5$

$2A - B - 1 = 0$

$3A - 1 = 5$

$A = 2$

$B = 3$

$\boxed{y = 2e^{2x} + 3e^{-x} - x}$