PRVI KOLOKVIJ IZ MATEMATIKE II
Visokošolski strokovni študij

11. april 2014

1. Vzemimo

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 0 & -2 & 0 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 4 & 4 & 4 \\ -3 & 4 & 13 \\ 7 & 8 & 13 \end{bmatrix}.$$

   (a) Utemeljite, ali je katera izmed danih matrik A, B in C obrnljiva.

   (b) Izračunajte produkt AB in utemeljite, ali je simetričen.

   (c) Določite matriko X, da velja $AB + 2X = C^T$.

   Rešitev.

   (a) Matriki A in B nista kvadratni, zato ne moreta biti obrnjljivi. Za matriko C si poglejmo njeno determinanto:

$$\det(C) = \begin{vmatrix} 4 & 4 & 4 \\ -3 & 4 & 13 \\ 7 & 8 & 13 \end{vmatrix} = 208 + 364 - 96 - 112 - 416 + 156 \neq 0.$$

   Matrika C torej je obrnljiva.

   (b)

$$AB = \begin{bmatrix} 2 & -7 & 1 \\ 0 & -2 & 0 \\ -2 & 3 & -1 \end{bmatrix},$$

   kar ni simetrična matrika, saj $(AB)^T \neq AB$.

   (c)

$$X = \frac{1}{2}\big(C^T - AB\big) = \frac{1}{2}\left(\begin{bmatrix} 4 & -3 & 7 \\ 4 & 4 & 8 \\ 4 & 13 & 13 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 2 & -7 & 1 \\ 0 & -2 & 0 \\ -2 & 3 & -1 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 3 & 5 & 7 \end{bmatrix}$$

2. Linearna preslikava $\mathcal{A}$ preslika vektor $(1, 0, 0)$ v vektor $(1, 2, -1)$, vektor $(0, 1, 0)$ v vektor $(-1, 1, 0)$ in vektor $(0, 0, 1)$ v vektor $(2, 4, -2)$.

   (a) Določite matriko A, ki pripada dani linearni preslikavi $\mathcal{A}$.

   (b) Kam linearna preslikava $\mathcal{A}$ preslika vektor $(-3, 2, 1)$?

   (c) Kateri vektor se z linearno preslikavo $\mathcal{A}$ slika v vektor $(1, 2, 3)$?

   (d) Kakšen je rang matrike A?

   Rešitev.

(a) Stoplci matrike A so slike standardnih baznih vektorjev $(1,0,0)$, $(0,1,0)$ in $(0,0,1)$, zato

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & 4 \\ -1 & 0 & -2 \end{bmatrix}$$

(b) Iskani vektor dobimo kot

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & 4 \\ -1 & 0 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -3 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

(c) Iskani vektor dobimo z rešitvijo sistema

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 4 & 2 \\ -1 & 0 & -2 & 3 \end{array}\right] \begin{array}{l} \\ V_2 - 2V_1 \\ V_3 + V_1 \end{array} \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 4 \end{array}\right] \begin{array}{l} \\ \\ V_2 + 3V_3 \end{array}$$

$$\sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 12 \end{array}\right]$$

Opazimo, da sistem ni rešljiv, zato iskani vektor ne obstaja.

(d) Iz konca točke (c) vidimo, da je rang matrike A enak 2.

3. Vzemimo matriko

$$A = \begin{bmatrix} 7 & 1 & -3 \\ -15 & -1 & t \\ 8 & 1 & -4 \end{bmatrix}.$$

(a) Določite parameter t tako, da bo 2 lastna vrednost matrike A. Poiščite tudi lastni vektor matrike A, ki pripada lastni vrednosti 2.

(b) Določite parameter t tako, da bo $(1,1,1)$ lastni vektor matrike A. Kakšna je njegova lastna vrednost?

Rešitev.

(a) Da je λ lastna vrednost matrike A, mora veljati $\det(A - \lambda I) = 0$. Zato si poračunajmo $\det(A - 2I)$:

$$\begin{aligned} \det(A - 2I) &= \begin{vmatrix} 7-2 & 1 & -3 \\ -15 & -1-2 & t \\ 8 & 1 & -4-2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 5 & 1 & -3 \\ -15 & -3 & t \\ 8 & 1 & -6 \end{vmatrix} \\ &= 90 + 8t + 45 - 72 - 5t - 90 \\ &= 3t - 27 \end{aligned}$$

Glede na napisano dobimo pogoj $3t - 27 = 0$ oziroma $t = 9$.

Da poiščemo pripadajoči lastni vektor, rešimo homogen sistem:

$$A-2I=\begin{bmatrix}7-2 & 1 & -3\\ -15 & -1-2 & 9\\ 8 & 1 & -4-2\end{bmatrix}\begin{array}{l} \\ V_2:3\\ \\ \end{array}\sim\begin{bmatrix}5 & 1 & -3\\ -5 & -1 & 3\\ 8 & 1 & -6\end{bmatrix}\begin{array}{l} \\ V_1+V_2\\ 8V_1-5V_3\end{array}$$

$$\sim\begin{bmatrix}5 & 1 & -3\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 3 & 6\end{bmatrix}\begin{array}{l} \\ V_3:3\\ V_2\end{array}\sim\begin{bmatrix}5 & 1 & -3\\ 0 & 1 & 2\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}$$

Iz druge vrstice dobimo, da velja $y+2z=0$, oziroma z je poljuben in $y=-2z$. Iz prve vrstice pa nato $5x+y-3z=0$ oziroma $5x-5z=0$ oziroma $x=z$. Tako dobimo, da je iskani lastni vektor oblike $(z,-2z,z)$, recimo $(1,-2,1)$.

(b) Neničelen vektor x je lasten vektor za matriko A, če za nek λ velja $Ax=\lambda x$ (kjer λ imenujemo pripadajoča lastna vrednost). Ker velja

$$\begin{bmatrix}7 & 1 & -3\\ -15 & -1 & t\\ 8 & 1 & -4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}5\\ -16+t\\ 5\end{bmatrix},$$

dobimo $-16+t=5$ oziroma $t=21$. Pripadajoča lastna vrednost je tako $\lambda=5$.

4. Ob opazovanju domačega mravljišča opazite, da so si mravlje naredile ravno ploščad v obliki trikotnika, napetega na točke $A(1,-1,3)$, $B(3,-1,1)$ in $C(0,0,3)$.

(a) Poiščite kot α trikotnika ABC.

(b) Poiščite ploščino trikotne ploščadi ABC.

(c) Poiščite ravnino, ki vsebuje točke A, B in C.

(d) Če gre mravlja po najkrajši poti od koordinatnega izhodišča, ki leži v notranjosti mravljišča, na zunanjo stran mravljišča, pristane na trikotniku ABC. Kolikšna je dolžina te najkrajše poti?

Rešitev. Definirajmo vektorja

$$\overrightarrow{AB}=\vec r_B-\vec r_A=(2,0,-2)$$
$$\overrightarrow{AC}=\vec r_C-\vec r_A=(-1,1,0)$$

(a)

$$\cos\alpha=\frac{\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}}{|\overrightarrow{AB}||\overrightarrow{AC}|}=\frac{-2+0+0}{\sqrt{4+0+4}\sqrt{1+1+0}}=-\frac{1}{2}$$

Iskani kot je torej $\alpha=\frac{2\pi}{3}$.

(b)

$$p=\frac{1}{2}\left|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}\right|=\frac{1}{2}\left|\begin{vmatrix}\vec i & \vec j & \vec k\\ 2 & 0 & -2\\ -1 & 1 & 0\end{vmatrix}\right|=\frac{1}{2}\big|(2,2,2)\big|=\frac{\sqrt{12}}{2}=\sqrt{3}$$

(c)

$$\vec{n} = \overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = (2, 2, 2) = 2(1, 1, 1).$$

Zato se ravnina glasi $x+y+z = d$, kjer d določimo z vstavljanjem poljubne točke na ravnini (A, B ali C): $d = 3$. Iskana ravnina je tako $x+y+z = 3$.

(d) Dolžina iskane poti je v resnici enaka razdalji koordinatnega izhodišča $(0, 0, 0)$ do ravnine $x + y + z = 3$, torej

$$d = \frac{0 + 0 + 0 - 3}{\sqrt{1 + 1 + 1}} = \sqrt{3}$$