DRUGI KOLOKVIJ IZ MATEMATIKE II
Visokošolski strokovni študij

6. junij 2014

1. S pomočjo razvoja funkcije pod integralom v Taylorjevo vrsto okrog točke $x_0 = 0$ do vključno tretje potence izračunajte približno vrednost integrala
$$\int_0^2 \frac{\sin \frac{x}{2}}{x}\, dx.$$

   Rešitev. Ker velja $\sin x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k x^{2k+1}}{(2k+1)!} = x - \frac{x^3}{6} + \ldots$, velja
$$\frac{\sin \frac{x}{2}}{x} = \frac{\frac{x}{2} - \frac{(\frac{x}{2})^3}{6} + \ldots}{x} = \frac{1}{2} - \frac{x^2}{48} + \ldots$$
   in zatorej je iskani integral približno enak
$$\int_0^2 \left(\frac{1}{2} - \frac{x^2}{48}\right) dx = \left(\frac{x}{2} - \frac{x^3}{144}\right)\Big|_0^2 = 1 - \frac{8}{144} = 1 - \frac{1}{18} = \frac{17}{18}$$

2. Vzemimo hrib, katerega obliko (nadmorsko višino) opisuje funkcija
$$z = f(x,y) = 2x - x^2 - y^2 - 4y + 20.$$
   (a) Poiščite in skicirajte nivojske krivulje (izohipse)
$$f(x,y) = 0, \quad f(x,y) = 9, \quad f(x,y) = 21 \quad \text{in} \quad f(x,y) = 25.$$
   (b) Računsko poiščite položaj vrha tega hriba (x in y koordinati) in njegovo nadmorsko višino. Utemeljite, da je izračunana točka res vrh hriba.

   Rešitev.

   (a) Nivojske krivulje so $f(x,y) = C$, kar pomeni $2x - x^2 - y^2 - 4y + 20 = C$ oziroma $x^2 - 2x + y^2 + 4y = 20 - C$ oziroma
$$(x-1)^2 - 1 + (y+2)^2 - 4 = 20 - C \quad \text{oziroma} \quad (x-1)^2 + (y+2)^2 = 25 - C.$$
   Nivojske krivulje so torej praviloma krožnice s premaknjenim središčem v točko $S(1,-2)$.
   Konkretno, $f(x,y) = 0$ pomeni $(x-1)^2 + (y+2)^2 = 25$, torej krožnico s središčem v $S(1,-2)$ in polmerom 5. Zahteva $f(x,y) = 9$ pomeni $(x-1)^2 + (y+2)^2 = 16$, torej krožnico s središčem v $S(1,-2)$ in polmerom 4; zahteva $f(x,y) = 21$ pomeni $(x-1)^2 + (y+2)^2 = 4$, torej krožnico s središčem v $S(1,-2)$ in polmerom 2 in zahteva $f(x,y) = 25$ pomeni $(x-1)^2 + (y+2)^2 = 0$ oziroma zgolj eno točko $S(1,-2)$.

(b) Naloga nas v resnici sprašuje po lokalnih ekstremih funkcije $f(x, y)$. Zato najprej rešimo sistem $f_x = 0$ in $f_y = 0$. Torej

$$2 - 2x = 0 \quad \text{in} \quad -2y - 4 = 0.$$

Tako dobimo edino stacionarno točko (kandidata za vrh) $T(1, -2)$.
Preverimo ali je ta točka res tudi ekstrem (in kateri) s pomočjo Hessejeve determinante, $f_{xx} = -2$, $f_{xy} = 0$ in $f_{yy} = -2$. Ker velja

$$f_{xx}(1, -2)f_{yy}(1, -2) - f_{xy}^2(1, -2) = 4 > 0,$$

je točka $T(1, -2)$ res ekstrem in ker povrh velja $f_{xx}(1, -2) = -2$, je dobljena točka maksimum, torej res vrh hriba. Iskani koordinati sta tako $x = 1$ in $y = -2$, nadmorska višina pa $f(1, -2) = 25$.

3. Poiščite splošno rešitev diferencialne enačbe

$$xy' + 3x^3y = e^{-x^3}.$$

Rešitev. Diferencialna enačba je linearna diferencialna enačba prvega reda. Zato rešimo najprej homogeni del $xy' + 3x^3y = 0$, ki je (vedno) tipa ločljivih spremenljivk. Torej

$$\begin{aligned}
xy' + 3x^3y &= 0 \\
xy' &= -3x^3y \\
\frac{dy}{y} &= -3x^2\,dx \\
\log y &= -x^3 + \log C \\
y &= Ce^{-x^3}
\end{aligned}$$

Nato pa še variacijo konstante:

$$\begin{aligned}
y &= C(x)e^{-x^3} \\
y' &= C'(x)e{-}x^3 + C(x)e^{-x^3}(-3x^2)
\end{aligned}$$

Ko dobljeno vstavimo v začetno diferencialno enačbo, velja

$$\begin{aligned}
xC'(x)e{-}x^3 - 3x^3C(x)e^{-x^3} + 3x^3C(x)e^{-x^3} &= e^{-x^3} \\
xC'(x)e{-}x^3 &= e{-}x^3 \\
C'(x) &= \frac{1}{x} \\
C(x) &= \log x + D \\
y = C(x)e^{-x^3} &= e^{-x^3}\log x + De^{-x^3}
\end{aligned}$$

4. Poiščite splošno rešitev diferencialne enačbe

$$y'' + 4y = 8x^2$$

pri pogojih $y(0) = 1$ in $y'(0) = 2$.

Rešitev. Diferencialna enačba je linearna diferencialna enačba drugega reda s konstantnimi koeficienti. Zato rešimo najprej homogeni del $y'' + 4y = 0$, ki ima karakterističen polinom enak $\lambda^2 + 4 = 0$ z rešitvami $\lambda_{1,2} = \pm 2i$. Zato se rešitev homogenega dela glasi

$$y_H = C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x.$$

Za nehomogeni del $8x^2$ pa uporabimo nastavek

$$\begin{aligned} y_P &= ax^2 + bx + c \\ y_P' &= 2ax + b \\ y_P'' &= 2a, \end{aligned}$$

ki ga vstavimo v začetno diferencialno enačbo in tako dobimo

$$2a + 4ax^2 + 4bx + 4c = 8x^2,$$

od koder po primerjavi koeficientov pri enakih potencah sledi, da velja $4a = 8$, $4b = 0$ in $2a + 4c = 0$. Torej

$$a = 2, \quad b = 0, \quad c = -1.$$

Tako smo dobili

$$y_P = 2x^2 - 1$$

oziroma splošno rešitev

$$y = y_H + y_P = C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x + 2x^2 - 1.$$

Iz pogoja $y(0) = 1$ sledi $C_1 - 1 = 1$ oziroma $C_1 = 2$. Za pogoj $y'(0) = 2$ poračunamo najprej $y'(x) = -2C_1 \sin 2x + 2C_2 \cos 2x + 4x$ in zatorej $2C_2 = 2$ oziroma $C_2 = 1$. Iskana rešitev se tako glasi

$$y = 2\cos 2x + \sin 2x + 2x^2 - 1.$$