DIFERENCIALNI IZPIT

6. september 2007

1. Dokažite, da je krivuljni integral

$$\int_C \left(\frac{y}{x^2+1} + \sqrt{\frac{yz}{x}} + e^z,\ \arctan x + 2yz^3 + \sqrt{\frac{xz}{y}},\ xe^z + \sqrt{\frac{xy}{z}} + 3y^2z^2 \right) d\vec{r}$$

neodvisen od poti in ga za primer, ko je C neka krivulja od točke $A\left(\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}, 0\right)$ do točke $B(0,2,1)$, tudi izračunajte.

Rešitev. Iz teorije vemo, da bo ta integral neodvisen od poti, če bo rotor vektorskega polja $\vec{V} = (P,Q,R) = \left(\frac{y}{x^2+1} + \sqrt{\frac{yz}{x}} + e^z, \arctan x + 2yz^3 + \sqrt{\frac{xz}{y}}, xe^z + \sqrt{\frac{xy}{z}} + 3y^2z^2\right)$ enak $\vec{0}$, zato računajmo:

$$\begin{aligned}
R_y - Q_z &= \frac{1}{2}\sqrt{\frac{x}{yz}} + 6yz^2 - 6yz^2 - \frac{1}{2}\sqrt{\frac{x}{yz}} = 0 \\
P_z - R_x &= \frac{1}{2}\sqrt{\frac{y}{xz}} + e^z - e^z - \frac{1}{2}\sqrt{\frac{y}{xz}} = 0 \\
Q_x - P_y &= \frac{1}{x^2+1} + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{z}{xy}} - \frac{1}{x^2+1} - \frac{1}{2}\sqrt{\frac{z}{xy}} = 0 \\
\operatorname{rot}\vec{V} &= (R_y - Q_z, P_z - R_x, Q_x - P_y) = (0,0,0).
\end{aligned}$$

Po teoriji tudi vemo, da zato tak integral izračunamo preko potenciala tega vektorskega polja:

$$\begin{aligned}
U &= \int \left(\frac{y}{x^2+1} + \sqrt{\frac{yz}{x}} + e^z \right) dx = y\arctan x + 2\sqrt{xyz} + xe^z + C(y,z) \\
U &= \int \left(\arctan x + 2yz^3 + \sqrt{\frac{xz}{y}} \right) dy = y\arctan x + y^2z^3 + 2\sqrt{xyz} + C(x,z) \\
U &= \int \left(xe^z + \sqrt{\frac{xy}{z}} + 3y^2z^2 \right) dz = xe^z + 2\sqrt{xyz} + y^2z^3 + C(x,y) \\
U &= y\arctan x + 2\sqrt{xyz} + xe^z + y^2z^3 + C
\end{aligned}$$

Tako končno dobimo, da je naš iskani rezultat enak:

$$U(B) - U(A) = 4 - \left(\frac{3\pi}{4} + \frac{\pi}{4} \right) = 4 - \pi.$$

2. Izračunajte pretok vektorskega polja

$$\vec{V} = \big(3x^2 + x\sin y + x,\ \cos y + xe^z + 3y - 3xy,\ x^3(y^2 + 3y - 1) - zx\big)$$

skozi zaključeno ploskev, ki je rob telesa:

$$z \le 3 - 2\sqrt{(x-1)^2 + (y-1)^2},\quad z \ge (x-1)^2 + (y-1)^2.$$

Namig: Uporabite Gaussovo formulo in uvedite premaknjene cilindrične koordinate

$$x = r\cos\varphi + 1,\quad y = r\sin\varphi + 1,\quad z = z.$$

Rešitev. Sledili bomo namigu in si tako pomagali z Gaussovo formulo. Tako najprej poračunamo divergenco našega polja:

$$\operatorname{div} V = 6x + \sin y + 1 - \sin y + 3 - 3x - x = 2x + 4.$$

Če sledimo dalje namigu in pogledamo telo preko omenjenih koordinat, dobimo

$$z \le 3 - 2r,\quad z \ge r^2.$$

Presečišče teh mejhnih ploskev se zgodi, ko je $3-2r = r^2$, kar pomeni $(r-1)(r+3) = 0$, torej pri $r = 1$.

Vse do sedaj povedano nam tako prevede naš iskani integral do:

$$\begin{aligned}
\ldots &= \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^1 dr \int_{r^2}^{3-2r} \big(2(r\cos\varphi + 1) + 4\big) r\,dz = \\
&= \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^1 dr \int_{r^2}^{3-2r} (2r^2\cos\varphi + 6r)dz = \\
&= \int_0^{2\pi} \cos\varphi\, d\varphi \int_0^1 dr \int_{r^2}^{3-2r} 2r^2 dz + \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^1 dr \int_{r^2}^{3-2r} 6r dz = \\
&= 0 + 2\pi \int_0^1 dr \int_{r^2}^{3-2r} 6r dz = 2\pi \int_0^1 6r(3 - 2r - r^2)dr = \\
&= 2\pi\left(9r^2 - 4r^3 - \frac{3r^4}{2}\right)\Bigg|_0^1 dr = 2\pi\left(9 - 4 - \frac{3}{2}\right) = \\
&= 7\pi.
\end{aligned}$$

3. Izračunajte kompleksni integral

$$\int_{\left|z-(3+3i)\right|=4} \frac{1}{z(z-3)(z-3i)^2}\, dz,$$

kjer je integracija v pozitivni smeri.

Rešitev. Ker je razdalja točke $3+3i$ do izhodišča enaka $3\sqrt{2}$, kar je več kot 4, sta edini singularnosti znotraj našega območja le $z=3$ in $z=3i$, kar pomeni, da poračunamo le ta dva residuuma. Singularnost $z=3$ je pol prve stopnje, singularnost $z=3i$ pa pol druge stopnje. Računajmo:

$$\begin{aligned}
\operatorname{Res}_{z=3}\frac{1}{z(z-3)(z-3i)^2} &= \lim_{z\to 3}\frac{1}{z(z-3i)^2} = \frac{1}{3(3-3i)^2} = \frac{1}{27(1-2i-1)} = \\
&= -\frac{1}{54i} = \frac{i}{54} \\
\operatorname{Res}_{z=3i}\frac{1}{z(z-3)(z-3i)^2} &= \lim_{z\to 3i}\left(\frac{1}{z(z-3)}\right)' = \lim_{z\to 3i}\frac{-2z+3}{z^2(z-3)^2} = \frac{-6i+3}{-9(3i-3)^2} = \\
&= \frac{-6i+3}{-81(-1-2i+1)} = \frac{-6i+3}{162i} = -\frac{2+i}{54}
\end{aligned}$$

Integral tako pride

$$\begin{aligned}
... &= 2\pi i\left(\operatorname{Res}_{z=3}\frac{1}{z(z-3)(z-3i)^2} + \operatorname{Res}_{z=3i}\frac{1}{z(z-3)(z-3i)^2}\right) = \\
&= 2\pi i\left(\frac{i}{54} - \frac{2+i}{54}\right) = -\frac{2\pi i}{27}
\end{aligned}$$

4. Poiščite rešitev $u(x,t)$ diferencialne enačbe

$$\begin{aligned}
u_{xx} &= 4u_{tt} \quad , \quad 0 < x < \tfrac{\pi}{2}\ ,\ t > 0 \\
u(0,t) &= 0 \\
u(\tfrac{\pi}{2},t) &= 0 \\
u(x,0) &= \sin(4x) \\
u_t(x,0) &= \sin(4x)
\end{aligned}$$

Rešitev.

$$\begin{aligned}
u(x,t) &= F(x)G(t) \\
F''(x)G(t) &= 4F(x)G''(t) \\
\tfrac{F''}{F} = 4\tfrac{G''}{G} &= -k^2 \\
F'' + k^2F &= 0 \\
F(x) &= A\cos(kx) + B\sin(kx) \\
u(0,t) = 0 &\rightarrow A = 0 \\
u(\tfrac{\pi}{2},0) = 0 &\rightarrow k = 2n, n \in \mathcal{N} \\
F_n(x) &= B_n \sin(2nx) \\
4G'' + (2n)^2G &= 0 \\
G_n(t) &= C_n\cos(nt) + D_n\sin(nt) \\
u(x,t) &= \sum_{n=1}^{\infty} \sin(2nx)\Big(P_n\cos(nt) + Q_n\sin(nt)\Big) \\
u(x,0) = \sin(4x) &\rightarrow \text{ vsi } P_n = 0 \text{ razen } P_2 = 1 \\
u_t(x,0) = \sin(4x) &\rightarrow \text{ vsi } Q_n = 0 \text{ razen } Q_2 = \tfrac{1}{2} \\
u(x,t) &= \sin(4x)\Big(\cos(2t) + \tfrac{1}{2}\sin(2t)\Big)
\end{aligned}$$

5. Vržemo tri kocke. Izračunajte verjetnost dogodka, da padejo različna števila iste parnosti?

Prva rešitev.

$P($ padejo različna števila iste parnosti $) =$

$2 * P($ padejo različna soda števila $) =$

$2 * \frac{\text{število ugodnih}}{\text{število vseh}} =$

$2 * \frac{3!}{6*6*6} = \frac{1}{18}$

Druga rešitev.

Na prvi kocki pade karkoli, za drugo kocko sta ugodni dve cifri, za tretjo pa samo ena cifra.

$P = 1 \cdot \frac{2}{6} \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{18}$