DIFERENCIALNI IZPIT

15. januar 2008

1. (a) Izračunajte tangetno ravnino na ploskev

$$2^x + z \arctan y + \log z = 1$$

v točki $T(0,0,1)$.

(b) V kateri točki krivulje

$$\vec{r}(t) = \left(\frac{t(t-1)}{\log 2}, \sin^2 t - \cos^2 t, t + \cos(2t) \right)$$

je tangetna premica vzporedna z ravnino $(\log 2)x + y + z = 1$?

Rešitev.

(a) Normala tangetne ravnine je enaka

$$\vec{n}(x,y,z) = (F_x, F_y, F_z) = \left(2^x \log 2, \frac{z}{1+y^2}, \arctan y + \frac{1}{z} \right)$$
$$\vec{n}(0,0,1) = (\log 2, 1, 1)$$

Tangetna ravnina se tako glasi $(\log 2)x + y + z = d$, kjer d poračunamo z vstavljanjem točke T in dobimo

$$(\log 2)x + y + z = 1.$$

(b) Smerni vektor tangentne premice je enak

$$\dot{\vec{r}}(t) = \left(\frac{2t-1}{\log 2}, 4 \sin t \cos t, 1 - 2\sin 2t \right) = \left(\frac{2t-1}{\log 2}, 2\sin 2t, 1 - 2\sin 2t \right).$$

Pogoj vzporednosti z ravnino pomeni pravokotnost na normalo te ravnine oziroma

$$\log 2 \, \frac{2t-1}{\log 2} + 2\sin 2t + 1 - 2\sin 2t = 0,$$

kar nam da $t = 0$ in točko $T(0,-1,1)$.

2. Vzemimo točke $T_1(0,0)$, $T_2(\pi,0)$ in $T_3(0,2)$. S pomočjo Greenove formule izračunajte integral

$$\int_C 10x^9y^{11}\,dx + (11x^{10}y^{10} - 3y^2\cos x)dy,$$

kjer je krivulja C sestavljena iz daljice od točke T_1 do točke T_2, krivulje $y = 1+\cos x$ od točke T_2 do točke T_3 in daljice od točke T_3 do točke T_1.

Rešitev. Označimo $P = 10x^9y^{11}$ in $Q = 11x^{10}y^{10} - 3y^2\cos x$. Po Greenovi formuli se nam iskani integral prevede do (tekom računanja uvedemo substitucijo $u = 1+\cos x$):

$$\begin{aligned}\iint_D (Q_x - P_y)\,dxdy &= \iint_D (110x^9y^{10} + 3y^2\sin x - 110x^9y^{10})\,dxdy = \\ &= \int_0^\pi dx \int_0^{1+\cos x} 3y^2\sin x\,dy = \int_0^\pi (1+\cos x)^3\sin x\,dx = \\ &= -\int_2^0 u^3\,du = -\left(0 - \frac{2^4}{4}\right) = 4.\end{aligned}$$

3. Izračunajte kompleksni integral

$$\int_{|z+2i|=3} \frac{9}{z(z+3i)^2(z+3)}\,dz,$$

kjer je integracija v pozitivni smeri.

Rešitev. Singularnosti znotraj našega območja sta le $z = 0$ in $z = -3i$, zato upoštevamo le ta dva residuuma. Singularnost $z = 0$ je pol prve stopnje, singularnost $z = -3i$ pa pol druge stopnje.

$$\begin{aligned}\mathrm{Res}_{z=0}\frac{9}{z(z+3i)^2(z+3)} &= \lim_{z\to 0}\frac{9}{(z+3i)^2(z+3)} = -\frac{1}{3} \\ \mathrm{Res}_{z=-3i}\frac{9}{z(z+3i)^2(z+3)} &= \lim_{z\to -3i}\left(\frac{9}{z(z+3)}\right)' = \lim_{z\to -3i}\frac{9(-2z-3)}{z^2(z+3)^2} = \\ &= \frac{9(6i-3)}{(-3i)^2(-3i+3)^2} = \ldots = \frac{1}{3} + \frac{i}{6}\end{aligned}$$

Integral se nam tako prevede v

$$\begin{aligned}&= 2\pi i\left(\mathrm{Res}_{z=0}\frac{9}{z(z+3i)^2(z+3)} + \mathrm{Res}_{z=-3i}\frac{9}{z(z+3i)^2(z+3)}\right) = \\ &= 2\pi i\left(-\frac{1}{3} + \frac{1}{3} + \frac{i}{6}\right) = -\frac{\pi}{3}\end{aligned}$$

4. Z Laplace-ovo transformacijo poiščite rešitev $x(t)$ diferencialne enačbe

$$\begin{aligned} x'' - 2x' &= -4 \\ x(0) &= -1 \\ x'(0) &= 4 \end{aligned}$$

Rešitev.

$$\begin{aligned} s^2X + s - 4 - 2(sX + 1) &= \tfrac{-4}{s} \\ (s^2 - 2s)X &= \tfrac{-4}{s} - s + 6 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} X(s) &= \tfrac{-4}{s^2(s-2)} - \tfrac{s-6}{s(s-2)} \\ x(t) &= -4 \lim_{s\to 0} \left[\tfrac{e^{st}}{s-2}\right]' - 4 \lim_{s\to 2} \tfrac{e^{st}}{s^2} - \lim_{s\to 0} \tfrac{s-6}{s-2} e^{st} - \lim_{s\to 2} \tfrac{s-6}{s} e^{st} = \\ & -4 \lim_{s\to 0} \tfrac{e^{st}t(s-2) - e^{st}}{(s-2)^2} - e^{2t} - 3 + 2e^{2t} = -(-2t-1) - e^{2t} - 3 + 2e^{2t} = \\ & 2t - 2 + e^{2t} \end{aligned}$$

5. Pri metu kocke je slučajna spremenljivka $X =$ število padlih pik. Kocka pa ni pravilne oblike, ampak je verjetnost padlih pik sorazmerna številu pik:

$$p_k = P(\text{ pade } k \text{ pik }) = c \cdot k \quad , \quad k = 1, \ldots, 6$$

(a) Določite konstanto c!

(b) Koliko je $E(X)$?

Rešitev.

$$c \cdot (1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6) = 1 \to c = \frac{1}{21}$$

$$E(X) = \frac{1}{21} \cdot (1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + 5^2 + 6^2) = \frac{91}{21}$$

Vprašanja in pripombe: kristijan.cafuta@fe.uni-lj.si