DIFERENCIALNI IZPIT

2. junij 2008

1. Vzemimo krivuljni integral

$$\int_C (yz + 3x^2)dx + (xz - z + \arctan x)dy + (xy - y)dz.$$

   (a) Ali je omenjen integral neodvisen od poti?

   (b) Izračunajte omenjen integral za primer, ko je krivulja C daljica od točke $A(1,-1,-2)$ do točke $B(3,-1,1)$.

   Rešitev.

   (a) Vemo, da je krivuljni integral $\int_C \vec{V}\cdot d\vec{r}$ neodvisen od poti natanko tedaj, ko velja $\operatorname{rot}\vec{V} = \vec{0}$. Iz

$$\operatorname{rot}(yz + 3x^2, xz - z + \arctan x, xy - y) = (x - x, y - y, z + \frac{1}{1+x^2} - z) \neq \vec{0}$$

   tako sklepamo, da naš integral NI neodvisen od poti.

   (b) Parametrizirajmo daljico:

$$\begin{aligned} x(t) &= 1 + (3-1)t = 1 + 2t, & \dot{x}(t) &= 2 \\ y(t) &= -1 + (-1+1)t = -1, & \dot{y}(t) &= 0 \\ z(t) &= -2 + (1+2)t = -2 + 3t, & \dot{z}(t) &= 3 \end{aligned}$$

   kjer je $0 \leq t \leq 1$. Tako se nam iskani integral prevede do

$$... = \int_0^1 \Big(\big(2 - 3t + 3(1+2t)^2\big)2 + (-2t)3\Big)dt = \int_0^1 (24t^2 + 12t + 10)dt = ... = 24.$$

2. S pomočjo Gaussove formule izračunajte pretok vektorskega polja

$$\vec{V} = \big(xy + e^z\cos x,\ 3y^2 + \arctan(x^3z^2),\ -2yz + e^z\sin x\big)$$

   skozi zaključeno ploskev, ki je rob telesa, določenega z neenačbami

$$z \geq \sqrt{x^2+y^2}, \quad z \leq 6 - (x^2+y^2), \quad y \geq 0.$$

   Rešitev. Zaradi Gaussove formule si poračunajmo najprej divergenco našega vektorskega polja $\vec{V}$:

$$\operatorname{div}\vec{V} = y - e^z\sin x + 6y - 2y + e^z\sin x = 5y.$$

Telo, določeno z zgornjimi neenačbami, se v cilindričnih koordinatah opiše z

$$z \geq r, \quad z \leq 6 - r^2, \quad 0 \leq \varphi \leq \pi.$$

Projekcija našega telesa na xy-ravnino je krog z radijem, ki je rešitev enačbe $r = 6 - r^2$, torej $(r+3)(r-2) = 0$ oziroma $r = 2$. Tako s pomočjo Gaussove formule dobimo, da je iskani pretok vektorskega polja $\vec{V}$ enak

$$\int_0^\pi d\varphi \int_0^2 dr \int_r^{6-r^2} 5\, r \sin\varphi\, r\, dz = \int_0^\pi \sin\varphi\, d\varphi \int_0^2 5r^2(6 - r^2 - r)\, dr = ... = 56.$$

3. Izračunajte kompleksni integral

$$\int_{|z+i|=2} \frac{8}{z^2(z^2+4)}\, dz,$$

kjer je integracija v pozitivni smeri.

Rešitev. Singularnosti naše funkcije $\frac{8}{z^2(z^2+4)}$ so $z = 0$, ki je pol druge stopnje, in $z = \pm 2i$, ki sta pola prve stopnje. Znotraj integracijskega območja $|z - (-i)| = 2$ sta pa le $z = 0$ in $z = -2i$. Poračunajmo si residuuma v teh dveh singularnostih:

$$\begin{aligned}
\mathrm{Res}_{z=0} \frac{8}{z^2(z^2+4)} &= \lim_{z\to 0} \left(\frac{8}{(z^2+4)}\right)' = \lim_{z\to 0} \frac{-16z}{(z^2+4)^2} = 0, \\
\mathrm{Res}_{z=-2i} \frac{8}{z^2(z^2+4)} &= \lim_{z\to -2i} \frac{8}{z^2(z-2i)} = \frac{8}{-4(-4i)} = -\frac{i}{2}.
\end{aligned}$$

Iskani integral tako dobimo

$$\begin{aligned}
\int_{|z+i|=2} \frac{8}{z^2(z^2+4)}\, dz &= 2\pi i \left(\mathrm{Res}_{z=0} \frac{8}{z^2(z^2+4)} + \mathrm{Res}_{z=-2i} \frac{8}{z^2(z^2+4)}\right) = \\
&= 2\pi i \left(0 - \frac{i}{2}\right) = \pi.
\end{aligned}$$

4. Z Laplace-ovo transformacijo poiščite rešitev $x(t)$ diferencialne enačbe

$$\begin{aligned}
x'' - 3x' + 2x &= 0 \\
x(0) &= 0 \\
x'(0) &= 5
\end{aligned}$$

Rešitev.

$$\begin{aligned}
s^2X - 5 - 3sX + 2X &= 0 \\
X(s^2 - 3s + 2) &= 5 \\
X &= \frac{5}{(s-1)(s-2)} = \frac{A}{s-1} + \frac{B}{s-2} \\
5 &= A(s-2) + B(s-1) = \\
&= (A+B)s - 2A - B \\
A + B = 0 \ \ &, \ \ -2A - B = 5 \\
A = -5 \ \ &, \ \ B = 5 \\
x(t) &= -5e^t + 5e^{2t}
\end{aligned}$$

5. Kovanec mečemo toliko časa, dokler ne padeta dva grba zapored in ugotovimo število potrebnih metov. Izračunajte verjetnosti

$$p_n = P(\text{število metov je enako } n)$$

za vrednosti indeksov $n = 2, 3, 4$ in 5!

Rešitev.

$$\begin{aligned}
p_2 &= P(GG) = \frac{1}{4} \\
p_3 &= P(CGG) = \frac{1}{8} \\
p_4 &= P(XCGG) = \frac{1}{8} \\
p_5 &= P(XYCGG) = P(XY)P(CGG) = \big(P(CG) + P(GC) + P(CC)\big)P(CGG) = \\
&= \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{8} = \frac{3}{32}
\end{aligned}$$