

# DIFERENCIALNI IZPIT

2. september 2008

1. Podana je krivulja

$$\vec{r}(t) = (-\sin t + \cos t, -\cos t - \sin t, -t).$$

- (a) Izračunajte dolžino loka krivulje  $\vec{r}(t)$  med točkama  $T_1(1, -1, 0)$  in  $T_2(-1, 1, \pi)$ .
- (b) Poiščite naravno parametrizacijo krivulje  $\vec{r}(t)$ .
- (c) Določite enačbo normalne ravnine na krivuljo  $\vec{r}(t)$  v točki  $T_3(-1, -1, -\frac{\pi}{2})$ .

**Rešitev.**

- (a) Takoj vidimo, da sta točki  $T_1$  in  $T_2$  doseženi pri  $t = 0$  oziroma  $t = -\pi$ . Računajmo

$$\begin{aligned}\dot{\vec{r}}(t) &= (-\cos t - \sin t, \sin t - \cos t, -1) \\ ds &= \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2} dt = \sqrt{(-\cos t - \sin t)^2 + (\sin t - \cos t)^2 + (-1)^2} dt = \\ &= \dots = \sqrt{3} dt \\ s &= \int_{-\pi}^0 \sqrt{3} dt = \sqrt{3}\pi\end{aligned}$$

- (b) Kot v točki (a) dobimo  $ds = \sqrt{3} dt$  in po integriranju tako  $s = \sqrt{3}t$  oziroma  $t = \frac{s}{\sqrt{3}}$ . Iskana naravna parametrizacija se tako glasi

$$\vec{r}(s) = \left( -\sin \frac{s}{\sqrt{3}} + \cos \frac{s}{\sqrt{3}}, -\cos \frac{s}{\sqrt{3}} - \sin \frac{s}{\sqrt{3}}, -\frac{s}{\sqrt{3}} \right)$$

- (c) Takoj se vidi, da je točka  $T_3$  dosežena pri  $t = \frac{\pi}{2}$ . Vemo, da je normala normalne ravnine enaka tangentnemu vektorju  $\dot{\vec{r}}(t)$ . Tako dobimo

$$\vec{n} = \dot{\vec{r}}\left(\frac{\pi}{2}\right) = (-1, 1, -1).$$

Enačba iskane normalne ravnine se tako glasi  $-x + y - z = d$ , kjer  $d$  poračunamo z vstavljanjem točke  $T_3$ . Dobimo  $d = \frac{\pi}{2}$  oziroma

$$-x + y - z = \frac{\pi}{2}.$$

2. Izračunajte ploščino lika, omejenega s krivuljo

$$x^2 = (x^2 + y^2)^2.$$

*Namig:* Uvedite polarne koordinate.

**Rešitev.** Po uvedbi polarnih koordinat  $x = r \cos \varphi$ ,  $y = r \sin \varphi$  se naša enačba krivulje prevede do  $r^2 \cos^2 \varphi = r^4$  oziroma  $r^2 = \cos^2 \varphi$ . Če sedaj to enačbo korenimo, dobimo,  $r = |\cos \varphi|$ . Vidimo, da je ta izraz odvisen od kota  $\varphi$  in sicer, če velja  $-\frac{\pi}{2} \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}$ , je  $\cos \varphi \geq 0$  in dobimo  $r = \cos \varphi$ , če pa velja  $\frac{\pi}{2} \leq \varphi \leq \frac{3\pi}{2}$ , je  $\cos \varphi \leq 0$  in dobimo  $r = -\cos \varphi$ . Iz opisanega sledi, da je ploščina enaka

$$\begin{aligned} P &= \iint_D dx dy = \\ &= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^{\cos \varphi} r dr + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} d\varphi \int_0^{-\cos \varphi} r dr = \\ &= \dots = \frac{1}{2} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 \varphi d\varphi + \frac{1}{2} \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} \cos^2 \varphi d\varphi = \\ &= \frac{1}{4} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (1 + \cos(2\varphi)) d\varphi + \frac{1}{4} \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} (1 + \cos(2\varphi)) d\varphi = \\ &= \dots = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2} \end{aligned}$$

*Opomba:* Lahko bi opazili, da je telo simetrično tako čez  $x$ -os, kot tudi čez  $y$ -os, kar pomeni, da lahko izračunamo le ploščino dela telesa v 1. kvadrantu in rezultat množimo s 4. V prvem kvadrantu je enačba naše krivulje le  $r = \cos \varphi$  in tako dobimo

$$P = 4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^{\cos \varphi} r dr = \dots = \frac{\pi}{2}$$

3. Določite parameter  $a$  tako, da bo vektorsko polje  $\vec{V} = (P, Q, R)$ , kjer je

$$\begin{aligned} P &= \frac{y}{1+x^2y^2} + e^{xyz}yz + (a^2+1)\cos(x)\log(yz), \\ Q &= \frac{x}{1+x^2y^2} + e^{xyz}xz + \frac{2\sin(x)}{y}, \\ R &= e^{xyz}xy + \frac{2(a+2)^2\sin(x)}{z}, \end{aligned}$$

potencialno in izračunajte njegov potencial.

**Rešitev.** Vektorsko polje  $\vec{V}$  bo potencialno, če bo veljalo  $\text{rot } \vec{V} = \vec{0}$ . Prva komponenta omenjenega rotorja je enaka 0 neodvisno od parametra  $a$ , iz drugih dveh komponent pa dobimo po kratkem računu naslednji zahtevi

$$0 = -\frac{(a^2 + 8a + 7) \cos x}{z},$$

$$0 = -\frac{(a^2 - 1) \cos x}{y},$$

oziroma

$$0 = a^2 + 8a + 7 = (a + 7)(a + 1) \quad \text{in} \quad 0 = a^2 - 1 = (a + 1)(a - 1).$$

Obe zahtevi bosta zadoščeni le v primeru  $a = -1$ .

Tako dobimo

$$P = \frac{y}{1 + x^2y^2} + e^{xyz}yz + 2 \cos(x) \log(yz),$$

$$Q = \frac{x}{1 + x^2y^2} + e^{xyz}xz + \frac{2 \sin(x)}{y},$$

$$R = e^{xyz}xy + \frac{2 \sin(x)}{z},$$

oziroma potencial tega vektorskega polja

$$\begin{aligned} \int P dx &= \int \left( \frac{y}{1 + x^2y^2} + e^{xyz}yz + 2 \cos(x) \log(yz) \right) dx = \\ &= \arctan(xy) + e^{xyz} + 2 \sin(x) \log(yz) + C(y, z), \\ \int Q dy &= \int \left( \frac{x}{1 + x^2y^2} + e^{xyz}xz + \frac{2 \sin(x)}{y} \right) dy = \\ &= \arctan(xy) + e^{xyz} + 2 \sin(x) \log(yz) + C(x, z), \\ \int R dz &= \int \left( e^{xyz}xy + \frac{2 \sin(x)}{z} \right) dz = e^{xyz} + 2 \sin(x) \log(yz) + C(x, y), \\ u &= \arctan(xy) + e^{xyz} + 2 \sin(x) \log(yz) + C \end{aligned}$$

4. Poiščite funkcijo  $x(t)$ , ki reši enačbo

$$\int_0^t e^{t-u} x(u) du = \sin t$$

**Rešitev.** Na obeh straneh enačbe uporabimo Laplace-ovo transformacijo in dobimo

$$\begin{aligned}\frac{1}{s-1}X &= \frac{1}{s^2+1} \\ X &= \frac{s-1}{s^2+1} = \frac{s}{s^2+1} - \frac{1}{s^2+1} \\ x(t) &= \cos t - \sin t\end{aligned}$$

5. V pravokotniku z obsegom 10 je stranica slučajna spremenljivka z gostoto verjetnosti

$$p(x) = \begin{cases} kx & 0 < x < 5 \\ 0 & \text{ostali } x \end{cases}$$

(a) Določite konstanto  $k$ !

(b) Kolikšna je verjetnost, da je ploščina pravokotnika manjša od  $\frac{21}{4}$ ?

**Rešitev.**

(a)

$$\begin{aligned}\int_0^5 kx \, dx &= 1 \\ k \frac{x^2}{2} \Big|_0^5 &= 1 \\ k &= \frac{2}{25}\end{aligned}$$

(b)

$$\begin{aligned}A(5-A) &= \frac{21}{4} \\ 4A^2 - 20A + 21 &= 0 \\ A_{1,2} &= \frac{20 \pm \sqrt{400 - 16 \cdot 21}}{8} = \frac{20 \pm 8}{8} = \frac{3}{2}, \frac{7}{2} \\ P &= 2 \int_0^{\frac{3}{2}} \frac{2}{25} x \, dx = \dots = \frac{9}{50}.\end{aligned}$$