IZPIT IZ MATEMATIKE III

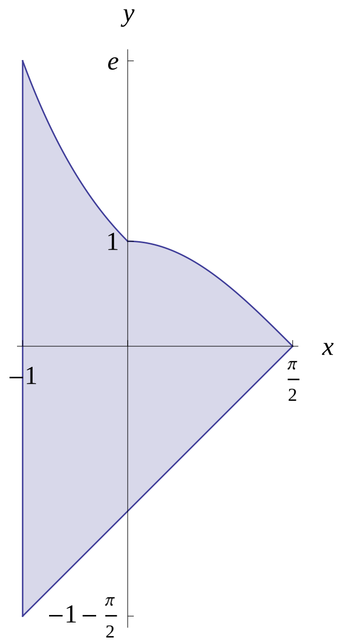
8. junij 2009

1. Poiščite tisto tangentno ravnino na ploskev
$$\vec{r}(u,v) = (ue^v, u^2, 2uv),$$
ki je vzporedna ravnini $2x - y - z = 3$.

   Rešitev.
$$\begin{aligned} \vec{r}_u(u,v) &= (e^v, 2u, 2v) \\ \vec{r}_v(u,v) &= (ue^v, 0, 2u) \\ \vec{n}(u,v) &= \vec{r}_u(u,v) \times \vec{r}_v(u,v) = (4u^2, 2e^v uv - 2e^v u, -2e^v u^2) \end{aligned}$$
Zaradi zahtevane vzporednosti ravnin velja
$$(4u^2, 2e^v uv - 2e^v u, -2e^v u^2) = k(2, -1, -1),$$
kar nam da sistem treh enačb:
$$\begin{aligned} 4u^2 &= 2k \\ 2e^v uv - 2e^v u &= -k \\ -2e^v u^2 &= -k \end{aligned}$$
S pomočjo prve in tretje enačbe takoj dobimo $e^v = 1$ oziroma $v = 0$. Z upoštevanjem tega pa skupaj z drugo enačbo dobimo še $u = 1$. (Opomba: primer $u = 0$ ni rešitev, ker bi v tem primeru dobili ničelni normalni vektor!). Tako smo dobili, da se iskana tangentna ravnina zgodi v točki $\vec{r}(1,0) = (1,1,0)$ in se zato glasi $2x - y - z = 1$.

2. Zamenjajte vrstni red integracije v integralu
$$\int_{-1-\frac{\pi}{2}}^{0} dy \int_{-1}^{y+\frac{\pi}{2}} 8\,dx + \int_0^1 dy \int_{-1}^{\arccos y} 8\,dx + \int_1^e dy \int_{-1}^{-\log y} 8\,dx$$
in nato dobljen integral izračunajte.

   Rešitev.
Krivulje, ki omejujejo naše integracijsko območje, se glasijo:
$$\begin{aligned} &x = -1, && && \\ &x = y + \frac{\pi}{2} && \text{oziroma} && y = x - \frac{\pi}{2}, \\ &x = \arccos y && \text{oziroma} && y = \cos x, \\ &x = -\log y && \text{oziroma} && y = e^{-x}, \end{aligned}$$
in tako dobimo območje, ki izgleda tako:



Z upoštevanjem mej torej dobimo, da se naš integral prevede do

$$... = \int_{-1}^{0} dx \int_{x-\frac{\pi}{2}}^{e^{-x}} 8\; dy + \int_{0}^{\frac{\pi}{2}} dx \int_{x-\frac{\pi}{2}}^{\cos x} 8\; dy,$$

kar pa enostavno izračunamo:

$$\begin{aligned}
... &= \int_{-1}^{0} 8\Big(e^{-x} - \big(x - \frac{\pi}{2}\big)\Big)dx + \int_{0}^{\frac{\pi}{2}} 8\Big(\cos x - \big(x - \frac{\pi}{2}\big)\Big)dx = \\
&= 8\Big(-e^{-x} - \frac{x^2}{2} + \frac{\pi x}{2}\Big)\Big|_{-1}^{0} + 8\Big(\sin x - \frac{x^2}{2} + \frac{\pi x}{2}\Big)\Big|_{0}^{\frac{\pi}{2}} = \\
&= -8 + 8e + 4 + 4\pi + 8 - \pi^2 + 2\pi^2 = \\
&= 4 + 8e + 4\pi + \pi^2
\end{aligned}$$

3. S pomočjo Gaussove formule izračunajte pretok vektorskega polja

$$\vec{V} = \big(3x + xz^2 - e^z \sin x,\; 2y - 4yz^2 + \arctan\big((x+z)^2\big),\; -4z + z^3 + e^z \cos x\big)$$

skozi rob območja, določenega z

$$z \geq 12\sqrt{x^2+y^2} \qquad \text{in} \qquad z \leq -x^2 - y^2 + 28.$$

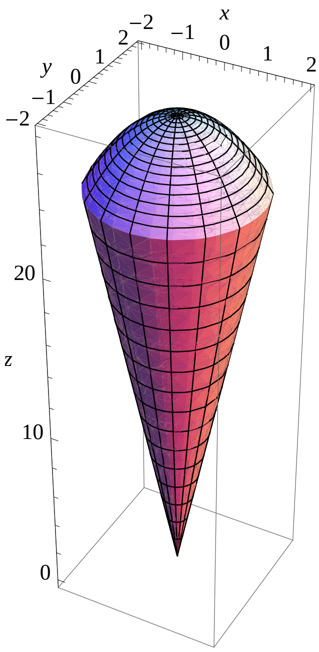
Rešitev.
Za uporabo Gaussove formule si poračunajmo najprej divergenco našega vektorskega

polja $\vec{V}$:

$$
\begin{aligned}
\operatorname{div}\vec{V} = & \frac{\partial(3x + xz^2 - e^z \sin x)}{\partial x} + \frac{\partial\Big(2y - 4yz^2 + \arctan\big((x+z)^2\big)\Big)}{\partial y} + \\
& + \frac{\partial(-4z + z^3 + e^z \cos x)}{\partial z} = \\
& = (3 + z^2 - e^z \cos x) + (2 - 4z^2) + (-4 + 3z^2 + e^z \cos x) = \\
& = 1
\end{aligned}
$$

Naše telo je omejeno s stožcem in (navzdol obrnjenim) paraboloidom, ki se v cilindričnih koordinatah glasita $z = 12r$ in $z = 28 - r^2$.

Presečišče teh ploskev dobimo $12r = 28 - r^2$ oziroma $(r + 14)(r - 2) = 0$, kar nam da edino rešitev $r = 2$.



Z upoštevanjem vsega povedanega se iskani pretok vektorskega polja izračuna kot

$$
\begin{aligned}
\ldots &= \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^2 dr \int_{12r}^{28-r^2} r\,dz = \\
&= \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^2 r(28 - r^2 - 12r)\,dr = \\
&= \int_0^{2\pi} \Big(-\frac{r^4}{4} + 14r^2 - 4r^3\Big)\Big|_0^2\,d\varphi = \\
&= 20\,\varphi\Big|_0^{2\pi} = 40\pi
\end{aligned}
$$

4. Z *Laplaceovo* transformacijo poiščite funkcijo $x(t)$, ki reši enačbo

$$2x' + 2x + 5\int_0^t x(u)\,du = 1$$

z začetnim pogojem $x(0) = 1$!

Rešitev.

$$\begin{aligned}
2x' + 2x + 5\int_0^t x(u)\,du &= 1\\
2(sX - 1) + 2X + \frac{5}{s}X &= \frac{1}{s}\\
X(2s + 2 + \frac{5}{s}) &= \frac{1}{s} + 2\\
X(2s^2 + 2s + 5) &= 2s + 1\\
X &= \frac{2s+1}{2s^2+2s+5}\\
X &= \frac{s+\frac{1}{2}}{s^2+s+\frac{5}{2}}\\
X &= \frac{s+\frac{1}{2}}{(s+\frac{1}{2})^2+\frac{9}{4}}\\
x(t) &= e^{-t/2}\cos\left(\frac{3}{2}t\right)
\end{aligned}$$

5. Rešite parcialno diferencialno enačbo

$$\begin{aligned}
u_{tt} &= 4u_{xx} \quad , \quad 0 < x < 2\,, \;\; 0 < t\\
u(0,t) &= 0\\
u(2,t) &= 0\\
u(x,0) &= \sin(\pi x)\\
u_t(x,0) &= \sin(\pi x)
\end{aligned}$$

Rešitev.

$$
\begin{aligned}
u &= F(x)G(t) \\
FG'' &= 4F''G \\
\frac{1}{4}\frac{G''}{G} &= \frac{F''}{F} = -\lambda^2 \\
F'' + \lambda^2 F &= 0 \\
r^2 + \lambda^2 &= 0 \\
r_{1,2} &= \pm\lambda i \\
F &= A\cos(\lambda x) + B\sin(\lambda x) \\
x = 0 &\Rightarrow A = 0 \\
x = 2 &\Rightarrow \lambda 2 = n\pi \Rightarrow \lambda = \frac{n\pi}{2} \\
F_n(x) &= B_n \sin\frac{n\pi x}{2} \\
G'' + 4\lambda^2 G &= 0 \\
r^2 + 4\lambda^2 &= 0 \\
r_{1,2} &= \pm 2\lambda i = \pm n\pi i \\
G_n(t) &= C_n\cos(n\pi t) + D_n\sin(n\pi t) \\
u(x,t) &= \sum_{n=1}^{\infty}\Bigg(P_n\cos(n\pi t) + Q_n\sin(n\pi t)\Bigg)\sin\frac{n\pi x}{2} \\
u(x,0) = \sin(\pi x) &= \sum_{n=1}^{\infty} P_n\sin\frac{n\pi x}{2} \quad\Rightarrow\quad P_2 = 1\ ,\ P_n = 0 \\
u_t(x,0) = \sin(\pi x) &= \sum_{n=1}^{\infty} Q_n n\pi\sin\frac{n\pi x}{2} \quad\Rightarrow\quad Q_2 = \frac{1}{2\pi}\ ,\ Q_n = 0 \\
u(x,t) &= \cos(2\pi t)\sin(\pi x) + \frac{1}{2\pi}\sin(2\pi t)\sin(\pi x)
\end{aligned}
$$