DIFERENCIALNI IZPIT

8. september 2009

1. Podana je krivulja
$$\vec{r}(t) = (\sqrt{2}\operatorname{ch} t, \sin t + \cos t, \sin t - \cos t)$$
in točki $T_1(\sqrt{2}, 1, -1)$, $T_2\big(\frac{5\sqrt{2}}{4}, \sin(\log 2) + \cos(\log 2), \sin(\log 2) - \cos(\log 2)\big)$.
   (a) Določite enačbo tangentne premice na krivuljo $\vec{r}(t)$ v točki T_1.
   (b) Izračunajte dolžino loka krivulje $\vec{r}(t)$ med točkama T_1 in T_2.

2. Določite parameter a tako, da bo krivuljni integral
$$\int_C \left(2x - \frac{a\cos z}{x}, \frac{z}{1+y^2z^2} + \frac{2\cos z}{y}, \frac{y}{1+y^2z^2} - (a^2-2)\log(xy)\sin z\right) \cdot d\vec{r}$$
neodvisen od poti in ga za primer, ko je C poljubna krivulja od točke $T_1(1,1,1)$ do točke $T_2(2, \frac{1}{2}, 0)$, izračunajte.

3. Izračunajte kompleksni integral
$$\int_{|z-2-2i|=\frac{5}{2}} \frac{8}{z(z-2)^3(z-2i)}\, dz,$$
kjer je integracija v pozitivni smeri.

4. Z *Laplace*-ovo transformacijo poiščite rešitev $x(t)$ diferencialne enačbe
$$\begin{aligned} x''' - 4x'' + 4x' &= 0 \\ x(0) &= 0 \\ x'(0) &= 1 \\ x''(0) &= 2 \end{aligned}$$

5. Poiščite rešitev $u(x,t)$ parcialne diferencialne enačbe
$$\begin{aligned} u_{tt} &= 9u_{xx}, \quad 0 < x < 3,\ 0 < t \\ u(0,t) &= 0 \\ u(3,t) &= 0 \\ u(x,0) &= 0 \\ u_t(x,0) &= \sin\left(\frac{\pi x}{3}\right) + \sin(\pi x) \end{aligned}$$