Diferencialni izpit

9. 2. 2010

1. naloga

Dani sta premica skozi točki $A(0,3,6)$ in $B(-1,4,10)$, ter sfera $x^2+y^2+z^2=9$.

1. Poiščite presečišči premice in sfere !
2. Pod kakšnim kotom prebode premica sfero ?

Rešitev:

Enačba premice: $\vec{r}=(0,3,6)+t(-1,1,4)$

$x=-t\ ,\ y=3+t\ ,\ z=6+4t$

v enačbo sfere: $t^2+(3+t)^2+(6+4t)^2=9$

$t^2+9+6t+tr+36+48t+16t^2=9$

$18t^2+54t+36=0$

$18(t+1)(t+2)=0$

$t_1=-1 \quad \rightarrow \quad \boxed{P_1(1,2,2)}$

$t_2=-1 \quad \rightarrow \quad \boxed{P_2(2,1,-2)}$

Kot med smerjo premice $\vec{e}$ in normalo na sfero $\vec{n}$ v prebodišču:

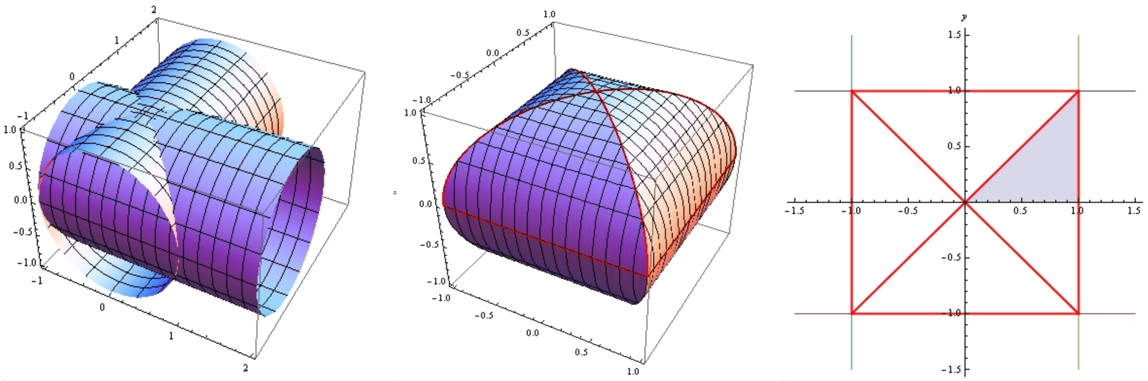
$$\cos\alpha=\frac{\vec{e}\cdot\vec{n}}{|\vec{e}|\ |\vec{n}|}=\frac{(-1,1,4)\cdot(1,2,2)}{\sqrt{18}\sqrt{9}}=\frac{1}{\sqrt{2}}$$

$\boxed{\alpha=45^o}$

2. naloga

Množica
$$\{\ (x,y,z)\ ;\ x^2+z^2 \le a^2 \ \text{ in } \ y^2+z^2 \le a^2\ \}$$
je presek dveh valjev. Poiščite prostornino in površino tega telesa !

Rešitev:



Enačbi plaščev valjev se odšteje in v preseku velja $x^2-y^2=0$, projekcija preseka valjev na ravnino (x,y) sta premici $y=\pm x$. Telo je sestavljeno iz 16 zrcalno razporejenih delov, izračun integrala izvedemo samo v prvem kvadrantu (osenčeni del v tretji sliki).

$$V = 16\int_0^a dx \int_0^x \sqrt{a^2-x^2}dy \ = 16\int_0^a x\sqrt{a^2-x^2}dx \ = 16\Big(-\frac{1}{3}\sqrt{(a^2-x^2)^3}\Big)\Big|_0^a$$

$$= \boxed{\tfrac{16}{3}a^3}$$

$$z=\sqrt{a^2-x^2} \quad , \quad p=\tfrac{\partial z}{\partial x}=\tfrac{-x}{\sqrt{a^2-x^2}}\ ,\ q=\tfrac{\partial z}{\partial y}=0$$

$$P = 16\int_0^a dx\int_0^x \sqrt{1+p^2+q^2}\,dy \ = 16\int_0^a dx\int_0^x \sqrt{1+\frac{x^2}{a^2-x^2}}\,dy \ =$$

$$16\int_0^a dx\int_0^x \frac{a}{\sqrt{a^2-x^2}}dy \ = 16a\int_0^a \frac{xdx}{\sqrt{a^2-x^2}} \ = 16a\Big(-\sqrt{a^2-x^2}\Big)\Big|_0^a$$

$$= \boxed{16a^2}$$

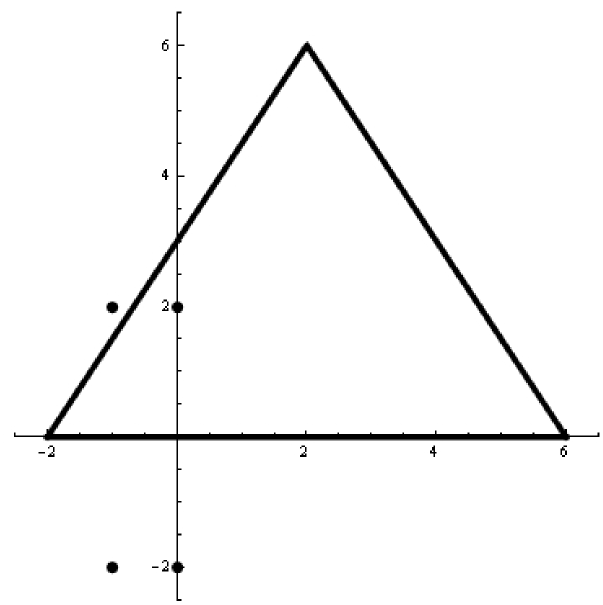
3. naloga

Izračunajte kompeksni integral

$$\int_C \frac{dz}{(z^2+4)(z^2+2z+5)}$$

kjer je integracijska krivulja rob trikotnika z oglišči $z_1 = -2$, $z_2 = 6$, $z_3 = 2+6i$ v pozitivni smeri !

Rešitev:



Singularne točke funkcije pod integralom:

$z_{1,2} = \pm 2i$
$z_{3,4} = -1 \pm 2i$

Znotraj konture trikotnika je samo $z_1 = 2i$ in je pol 1. stopnje. Uporabi se *izrek o residuih*.

$$\int_C \frac{dz}{(z^2+4)(z^2+2z+5)} =$$

$$2\pi i \operatorname*{res}_{z=z_1} f(z) = 2\pi i \lim_{z\to 2i} \frac{z-2i}{(z-2i)(z+2i)(z^2+2z+5)} =$$

$$2\pi i\ \frac{1}{4i} \cdot \frac{1}{-4+4i+5} = \boxed{\tfrac{\pi}{34}(1-4i)}$$

4. naloga

Z *Laplacovo* transformacijo poiščite rešitev $y(t)$ diferencialne enačbe

$$\begin{aligned} y'' + 2y' + y &= e^{-t} \\ y(0) &= -1 \\ y'(0) &= 2 \end{aligned}$$

Rešitev:

$$s^2 Y + s - 2 + 2sY + 2 + Y = \frac{1}{s+1}$$

$$(s^2 + 2s + 1)Y = \frac{1}{s+1} - s$$

$$Y = \frac{1}{(s+1)^3} - \frac{s}{(s+1)^2}$$

$$Y = \frac{1}{(s+1)^3} - \frac{s+1}{(s+1)^2} + \frac{1}{(s+1)^2}$$

$$Y = \frac{1}{(s+1)^3} - \frac{1}{s+1} + \frac{1}{(s+1)^2}$$

Zamenjamo $s + 1 \to s$, poiščemo inverzno transformacijo

$$\mathcal{L}^{-1}[\,\frac{1}{s^3} - \frac{1}{s} + \frac{1}{s^2}\,] = \frac{1}{2}t^2 + t - 1$$

in uporabimo pravilo $\mathcal{L}^{-1}[F(s-a)] = e^{at} f(t)$

$$y = \boxed{(\tfrac{1}{2}t^2 + t - 1)e^{-t}}$$

5. naloga

Iz škatle, v kateri so 3 *bele* in 4 *črne* kroglice, na slepo odstranimo 2 kroglici. Nato izberemo 2 kroglici in slučajna spremenljivka X je število belih kroglic med tema kroglicama. Poiščite verjetnostno funkcijo te slučajne spremenljivke !

Rešitev:

Potek reševanja je razviden iz naslednje tabele. Za izračun verjetnosti dogodkov $P(X=k)$, $k=0,1,2$ uporabimo *formulo za popolno verjetnost* $P(X=k)=\sum_i P(H_i)P(X=k/H_i)$.

	Hipoteze H_i			
Odstranjeni kroglici	BB	BČ	ČČ	
Verjetnosti $P(H_i)$	$\frac{\binom{3}{2}}{\binom{7}{2}}=\frac{3}{21}$	$\frac{\binom{3}{1}\binom{4}{1}}{\binom{7}{2}}=\frac{12}{21}$	$\frac{\binom{4}{2}}{\binom{7}{2}}=\frac{6}{21}$	
Novo stanje v škatli	1B 4Č	2B 3Č	3B 2Č	
Možni izidi za X	Pogojne verjetnosti $P(X=k/H_i)$			$P(X=k)$
(X=0)	$\frac{\binom{4}{2}}{\binom{5}{2}}=\frac{6}{10}$	$\frac{\binom{3}{2}}{\binom{5}{2}}=\frac{3}{10}$	$\frac{\binom{2}{2}}{\binom{5}{2}}=\frac{1}{10}$	$\frac{3}{21}\,\frac{6}{10}+\frac{12}{21}\,\frac{3}{10}+\frac{6}{21}\,\frac{1}{10}=\frac{60}{210}$
(X=1)	$\frac{\binom{4}{1}\binom{1}{1}}{\binom{5}{2}}=\frac{4}{10}$	$\frac{\binom{3}{1}\binom{2}{1}}{\binom{5}{2}}=\frac{6}{10}$	$\frac{\binom{2}{1}\binom{3}{1}}{\binom{5}{2}}=\frac{6}{10}$	$\frac{3}{21}\,\frac{4}{10}+\frac{12}{21}\,\frac{6}{10}+\frac{6}{21}\,\frac{6}{10}=\frac{120}{210}$
(X=2)	0	$\frac{\binom{2}{2}}{\binom{5}{2}}=\frac{1}{10}$	$\frac{\binom{3}{2}}{\binom{5}{2}}=\frac{3}{10}$	$\frac{12}{21}\,\frac{1}{10}+\frac{6}{21}\,\frac{3}{10}=\frac{30}{210}$

Rezultat je verjetnostna funkcija

$$\boxed{X:\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ \frac{2}{7} & \frac{4}{7} & \frac{1}{7} \end{pmatrix}}$$