Diferencialni izpit iz Matematike

7.9.2010

1. naloga

Dana sta valja $V1 : x^2 + y^2 = 2$ in $V2 : z = \sqrt{2 - y^2}$.

1. Zapišite parametrično enačbo presečišča valjev !
2. V točki $T(1, 1, 1)$ zapišite enačbo tangentne premice na presečno krivuljo !

Rešitev:

Najenostavnejši parameter je polarni kot φ :

$x = \sqrt{2}\cos\varphi\ ,\ y = \sqrt{2}\sin\varphi$

$z = \sqrt{2 - 2\sin^2\varphi} = \sqrt{2\cos^2\varphi} = \sqrt{2}|\cos\varphi|$

$$\boxed{\vec{r} = (\ \sqrt{2}\cos\varphi\ ,\ \sqrt{2}\sin\varphi\ ,\ \sqrt{2}|\cos\varphi|\ )}$$

Izračunamo parameter φ v dotikališču in tangetni vektor:

$(\ \sqrt{2}\cos\varphi\ ,\ \sqrt{2}\sin\varphi\ ,\ \sqrt{2}|\cos\varphi|\ ) = (1, 1, 1) \quad \rightarrow \quad \varphi = \frac{\pi}{4}$

$\dot{\vec{r}} = (\ -\sqrt{2}\sin\varphi\ ,\ \sqrt{2}\cos\varphi\ ,\ -\sqrt{2}\sin\varphi\ )$

$\vec{e} = \dot{\vec{r}}(\frac{\pi}{4}) = (-1, 1, -1)$

$$\boxed{\vec{r} = (1, 1, 1) + t(-1, 1, -1)}$$

2. naloga

Poiščite površino na valju $V2$, ki jo izreže valj $V1$, kjer sta $V1$ in $V2$ valja iz 1.naloge.

Rešitev:

Uporabimo formulo za površino ploskve, ki je podana v eksplicitni obliki $z=\sqrt{2-y^2}$, prvi valj določa integracijsko območje $D: x^2+y^2<2$. Ker ima D krožno simetrijo, bomo vpeljali polarne koordinate. Pri vstavljanju spodnje meje $\varphi=0$ je treba uporabiti *l'Hospitalovo* pravilo.

$$P=\iint\limits_D \sqrt{1+z_x^2+z_y^2}\,dxdy=\iint\limits_D \sqrt{1+\frac{y^2}{2-y^2}}\,dxdy=\iint\limits_D \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2-y^2}}\,dxdy$$

$$=4\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^{\sqrt{2}} \frac{\sqrt{2}\rho}{\sqrt{2-\rho^2\sin^2\varphi}}d\rho \;=4\sqrt{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \sqrt{2-\rho^2\sin^2\varphi}\;\frac{-1}{\sin^2\varphi}\Bigg|_0^{\sqrt{2}}$$

$$=4\sqrt{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi\left[\sqrt{2}\cos\varphi\;\frac{-1}{\sin^2\varphi}+\frac{\sqrt{2}}{\sin^2\varphi}\right]\;=4\sqrt{2}\sqrt{2}\left[\frac{1}{\sin\varphi}-\operatorname{ctg}\varphi\right]\Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}}$$

$$=8\left[1-\lim_{\varphi\to 0}\tfrac{1-\cos\varphi}{\sin\varphi}\right]=8\left[1-\lim_{\varphi\to 0}\tfrac{\sin\varphi}{\cos\varphi}\right]=$$

$\boxed{8}$

3. naloga

V pozitivni smeri integracijske krivulje izračunajte kompleksni integral

$$\int\limits_{|z|=2} \frac{\cos z}{(2z-\pi)^2 z^2}\, dz$$

Rešitev:

Obe singularni točki podintegralske funkcije $f(z) = \frac{\cos z}{(2z-\pi)^2 z^2}$ ležita znotraj integracijske krivulje. $z_1 = 0$ je pol 2.stopnje, $z_2 = \frac{\pi}{2}$ je pol 1.stopnje. Integral izračunamo z izrekom o residuih.

$$\operatorname*{res}_{z=z_1} f(z) = \lim_{z\to 0}\left[\frac{\cos z}{(2z-\pi)^2}\right]' = \lim_{z\to 0} \frac{-\sin z(2z-\pi)^2 - \cos z 2(2z-\pi)2}{(2z-\pi)^4} = \frac{-2(-\pi)2}{\pi^4} = \frac{4}{\pi^3}$$

$$\operatorname*{res}_{z=z_2} f(z) = \lim_{z\to\frac{\pi}{2}} \frac{\cos z}{(2z-\pi)^2 z^2}(z-\frac{\pi}{2}) = \lim_{z\to\frac{\pi}{2}} \frac{\cos z}{2z-\pi}\cdot\frac{1}{2z^2} = \lim_{z\to\frac{\pi}{2}} \frac{-\sin z}{2}\cdot\frac{1}{2\frac{\pi}{2}^2} = \frac{-1}{2}\frac{2}{\pi^2} = \frac{-1}{\pi^2}$$

$$I = 2\pi i(\tfrac{4}{\pi^3} - \tfrac{1}{\pi^2}) = \boxed{i(\tfrac{8}{\pi^2} - \tfrac{2}{\pi})}$$

4. naloga

Poiščite inverzno *Laplacovo* transformacijo funkcije

$$F(s) = \frac{4s^2 + 13s + 30}{s^3 + 2s^2 + 10s}$$

Rešitev:

$F(s) = \frac{4s^2+13s+30}{s(s^2+2s+10)} = \frac{A}{s} + \frac{Bs+C}{s^2+2s+10} = \frac{A(s^2+2s+10)+Bs^2+Cs}{s(s^2+2s+10}$

$ks^2 \quad \rightarrow \quad A + B = 4$
$ks \quad \rightarrow \quad 2A + C = 13$
$k \quad \rightarrow \quad 10A = 30$
$A = 3\ ,\ B = 1\ ,\ C = 7$

$F(s) = \frac{3}{s} + \frac{s+7}{s^2+2s+10} = \frac{3}{s} + \frac{(s+1)+6}{(s+1)^2+9}$

$\boxed{f(t) = 3 + e^{-t}(\cos 3t + 2\sin 3t)}$

5. naloga

Funkcija

$$p(x) = kx^2 e^{-2x}$$

je gostota verjetnost slučajne spremenljivke X, ki je porazdeljena na intervalu $(0, \infty)$.

1. Določite konstanto k!
2. Izračunajte verjetnost $P(0 < X < 1)$!

Rešitev:

$\int_0^\infty p(x)dx = 1$ določa k : $\displaystyle\int_0^\infty x^2 e^{-2x} dx \ = e^{-2x}\left(\frac{x^2}{-2} - \frac{2x}{4} - \frac{2}{8}\right)\Big|_0^\infty$

$= \frac{1}{4} \quad \rightarrow \quad \boxed{k = 4}$

$$P(0 < X < 1) = \int_0^1 4x^2 e^{-2x} dx \ = 4e^{-2x}\left(\frac{x^2}{-2} - \frac{2x}{4} - \frac{2}{8}\right)\Big|_0^1$$

$= \frac{4}{e^2}(-\frac{1}{2} - \frac{1}{2} - \frac{1}{4}) + 1 = \boxed{1 - \frac{5}{e^2}}$